

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler
Redactor: R. Sänger

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

LIEPMANN, H. W.: Aspects of the Turbulence Problem (First Part)	321
VAN DYKE, M. D.: Impulsive Motion of an Infinite Plate in a Viscous Compressible Fluid	343
FAVRE, H., und GILC, B.: La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable	354
GLAUS, R.: Die automatische Kursregelung von Flugzeugen (Fortsetzung und Schluss)	371
ROHNER, F.: Kriterium der Gleitbereitschaft metallischer Vielkristalle	383

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

LÜDI, F.: Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingungen in Laufzeitröhren	390
--	-----

Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft in Baden	394
Paul Felix Neményi	400

Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices Bibliographiques	401
---	-----

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sänger, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss:* spätestens 8 Wochen vor Erscheinungs-termin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmassstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to *the editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 34.-, Ausland Fr. 40.-, Einzelnummer Fr. 8.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 34.-, foreign Fr. 40.-, single copy Fr. 8.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 34.-, étranger Fr. 40.-, le numéro Fr. 8.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postaux dans les pays suivants:

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{3}{4}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1952 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

Aspects of the Turbulence Problem

Survey Report

By HANS W. LIEPMANN, Pasadena, Calif.¹⁾

First Part

I. INTRODUCTION

It is an empirical fact that fluid flow at sufficiently high Reynolds numbers is always turbulent. For high Reynolds numbers the velocity components u_i always depend explicitly on the time t , even if the boundary conditions are independent of time. No steady flow is possible. Furthermore, $u_i(\vec{x}, t)$ is a stochastic function in space and time. These properties define turbulent flow.

Turbulence is a very general phenomenon. It exists in any type of fluid motion and appears to depend only upon a few very broad characteristics such as:

- (a) The existence of nonlinear or rather quasi-linear terms in the equations of motion which represent the transport acceleration in Eulerian coordinates.
- (b) The existence of a viscous damping term of an order higher than the non-linear terms.
- (c) The three-dimensionality of the motion.

The vast majority of the motions of fluids are turbulent. Consequently turbulence appears in many physical and astrophysical situations, sometimes as the prime mover and sometimes as a source of perturbation and of "noise" in a general sense.

The theory of turbulence has the aim of determining the statistical properties of $u_i(\vec{x}, t)$, that is, the mean values of u_i , the probability distributions, etc. A typical problem is, given the boundary or initial conditions of a flow such as the flow from infinity past a solid body, the flow through a pipe, etc., to find the average forces, the average velocity field and its fluctuations. In general, a problem like this is still far from being solved. For example, it is impossible today to predict the flow in a simple diverging channel without recourse to empirical results. It is known empirically that the flow character changes radically if a certain limiting angle of divergence is surpassed. Turbulence theory should predict this angle.

¹⁾ California Institute of Technology.

The three most conspicuous steps in turbulence research in recent years are:

- (1) The introduction of the concept of isotropic and homogeneous turbulence together with the development of a suitable formalism of description of turbulence (G. I. TAYLOR and von KÁRMÁN).
- (2) The idea of local isotropy and the asymptotic behavior of turbulence at very high Reynolds numbers (KOLMOGOROFF, ONSAGER, and von WEIZSÄCKER).
- (3) The discovery of the intermittent nature of turbulent shear flows (CORRSIN and TOWNSEND).

(1) defined the simplest problem in turbulence for both theoretical and experimental research. Most of the recent ideas in turbulence have developed from the study of isotropic turbulence.

(2) is a successful attempt to obtain asymptotically valid results for the behavior of the elements of turbulence of smallest dimensions which have resulted from a cascade process from larger elements.

(3) is the discovery of the fact that in turbulent shear flow a type of superstructure appears which influences the transport properties of turbulence decisively. The importance of intermittency has not yet been fully exploited. It is probably one of the most important features of turbulent transfer problems and very likely holds the key to turbulent separation.

Besides the central problem of computing the structure of the velocity field there are at least two more general problems in turbulence research: the question of the origin of turbulence and of transition from laminar to turbulent motion is one. The other is the effect of turbulent fluctuations on the motion of rigid bodies or on the propagation of waves.

In the following no attempt is made to give a complete review of the turbulence problem. Indeed, any such attempt would require a monograph. Instead, an attempt is made to discuss some general aspects of the turbulence problem, in particular those which are often omitted in reviews of turbulence. The important results of isotropic turbulence research are only briefly and incompletely summarized. However, for isotropic turbulence there exists an excellent recent review of AGOSTINI and BASS [1]¹⁾ as well as a number of earlier reviews [4], [6]. Stability theories and transition were omitted from the present review. The laminar stability theory can be found, for example, in the recent book of SCHLICHTING [11] and the review articles of PILLOW and DRYDEN [9], [5]. Thermal instability problems, which are most important for meteorological and astrophysical applications, have been discussed by CHANDRASEKHAR [41].

Only the general characteristic features of turbulent shear flow are stressed. Consistent results on the detailed nature of turbulent shear flows have been

¹⁾ Numbers in brackets refer to the Bibliography, page 341.

obtained only recently. To summarize these recent results and interpretations in a critical manner is a difficult task. Besides the space limitations, the author has not felt competent to undertake it here. For the details of shear flow reference is made to recent work of TOWNSEND [63], [65], LAUFER [52], ROTTA [59], and KLEBANOFF and DIEHL [50].

In Section II a brief survey is given of elementary results of the theory of stationary, stochastic processes. This section is intended to introduce concepts like correlation function and power spectrum. It also provides a link between the terminology and methods in turbulence research and in the theory of stochastic processes. In Section III the response of linear systems to random forcing functions is discussed, and a number of examples are given where turbulence plays the role of the forcing function. This section is intended to indicate the variety of physical situations in which turbulence enters. The examples demonstrate that it is frequently possible to say something about the effect of turbulent fluctuations without a very detailed knowledge of the mechanism of turbulence itself. In Section IV the general problem of turbulent transfer is stressed and the concepts of local isotropy and of intermittency are discussed. Finally, a short review of isotropic, homogeneous turbulence is given in Section V.

The author wishes to express his appreciation for critical discussions with Doctors J. D. COLE, P. A. LAGERSTROM, and A. ROSHKO which played an important part in preparing this review.

II. STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES

As a preliminary in dealing with turbulence it is very helpful to discuss briefly some elementary results of stationary stochastic processes. For a detailed study of the subject the reader is referred to WIENER [18] and RICE [16].

1. Stochastic Function

If $J(t)$ is a stochastic function of t , usually the time, then J for any given t is a random variable. The values of J at t_1, \dots, t_n form the components of a random vector. The probability structure of $J(t)$ is determined completely by the joint probability for each such random vector.

2. Mean Values

The mean values of functions of $J(t)$ are computed from the probability distribution and hence are ensemble averages. For certain stationary processes an ergodic property exists and ensemble averages can be replaced by time averages. Averaging will be indicated by a bar over the functions.

3. Stationarity

A stochastic process is called stationary if all mean values and probability distributions are independent of the choice of the origin of t . The process is thus homogeneous in time.

4. Correlation Function, Power Spectrum

$\overline{J(t)}$ = constant by stationarity. It is convenient to normalize and put

$$\overline{J(t)} = 0. \quad (\text{II-1})$$

The correlation function or auto-correlation function $\varphi(\tau)$ of $J(t)$ is defined by

$$\varphi(\tau) = \overline{J(t) J(t + \tau)} = \varphi(-\tau). \quad (\text{II-2})$$

In the following it will always be assumed that $\varphi(\tau) \rightarrow 0$ for large τ sufficiently rapidly to ensure the existence of the integrals defining the power spectrum $\Phi(\omega)$ and the time scale θ .

$$\Phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (\text{II-3})$$

$$\varphi(\tau) = \int_0^{\infty} \Phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (\text{II-4})$$

$$\varphi(0) \theta = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \Phi(0). \quad (\text{II-5})$$

(II-3) and (II-4) are often called the Wiener-Khintchine relations. In the theory of isotropic turbulence these relations were introduced independently by G. I. TAYLOR.

The assumptions made exclude periodicities in $J(t)$ and a discrete part in the power spectrum. For the study of turbulence this appears to be a natural assumption.

5. Ergodic Property

A stochastic process is called ergodic if the ensemble averages may be computed as time averages. A sufficient condition is the existence of a time scale θ and suitable similar integrability conditions for correlations of higher order. For example, consider the time average

$$I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T J(t) dt. \quad (\text{II-6})$$

$I(T)$ is a stochastic function of T . Its mean value is equal to the mean value $\overline{J(t)}$. If it can be shown that the dispersion of $I(T)$ becomes negligible as T becomes large then one measurement of $I(T)$ determines its mean and hence also the mean of $J(t)$. Since $\overline{J(t)} = 0$ the dispersion of $I(T)$ is given by

$$\overline{I(T)^2} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int \overline{J(t_1) J(t_2)} dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int \varphi(|t_1 - t_2|) dt_1 dt_2 \quad (\text{II-7})$$

or

$$\overline{I(T)^2} = \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau) \varphi(\tau) d\tau < \frac{2}{T} \int_0^\infty |\varphi(\tau)| d\tau. \quad (\text{II-8})$$

Hence $\overline{I(T)^2} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow \infty$. Similarly, to compute the auto-correlation function of $J(t)$ using the time average, an integrability condition for the quadruple correlation is needed, and so forth. In the special and important case where the mean square of a normally distributed $J(t)$ is computed from the time average the dispersion formula becomes quite similar to (II-8). Namely, if

$$L(T) = \frac{1}{T} \int_0^T J^2(t) dt \quad (\text{II-9})$$

then

$$\overline{[L(T) - \overline{L(T)}]^2} = \frac{4}{T^2} \int_0^T (T - \tau) \varphi^2(\tau) d\tau. \quad (\text{II-10})$$

The intuitive idea underlying the above reasoning is simply the following: if a time T_1 exists such that $J(t + \tau)$ is essentially independent of $J(t)$ for $\tau > T_1$, then averaging over a time $T \geq T_1$ is equivalent to taking the ensemble average over n systems with

$$n \approx \frac{T}{T_1}.$$

It is interesting to compare this reasoning with the proofs for the law of large numbers (for example [14]).

6. Mean Values of the Derivatives of $J(t)$. Spectral Moments

Differentiating (II-2) with respect to τ yields

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(\tau) &= \overline{J(t) J'(t + \tau)} = \overline{J(t - \tau) J'(t)}, \\ \varphi''(\tau) &= \overline{J(t) J''(t + \tau)} = -\overline{J'(t - \tau) J'(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-11})$$

Hence

$$\varphi''(0) = \overline{J J''} = -\overline{J'^2} \quad (\text{II-12})$$

and using (II-4) it follows that

$$\varphi''(0) = - \int_0^\infty \omega^2 \Phi(\omega) d\omega. \quad (\text{II-13})$$

The derivatives of the correlation function at $\tau = 0$ are thus simply related to the moments of the power spectrum. In general we have

$$\overline{(J^{(m)})^2} = \int_0^\infty \omega^{2m} \Phi(\omega) d\omega = (-1)^{2m-1} \varphi^{(2m)}(0). \quad (\text{II-14})$$

The existence of mean square derivatives of J thus implies the existence of the corresponding moments of the spectrum. If J has all mean derivatives then $\Phi(\omega)$ has to vanish rapidly enough for large ω to guarantee that all moments exist. This result is applied later on in arguments concerning the spectrum of turbulence.

Furthermore, it follows from (II-11) and (II-2) that

$$\overline{JJ'} = 0. \quad (\text{II-15})$$

$J(t)$ and its derivative at the same time have zero correlation. The same is obviously true for any correlation between derivatives differing by one order, for example

$$\overline{JJ''} = 0, \text{ etc.} \quad (\text{II-16})$$

7. Probability Distribution

To define $J(t)$ it is not sufficient to give $\varphi(\tau)$ or $\Phi(\omega)$; it is also necessary to prescribe the probability distribution of J and the joint distributions of $J(t_1)$, $J(t_2)$, etc. It is here that an essential difference between turbulence and linear random noise lies. In the theory of random noise, Brownian motion and related topics it is often possible to assume that $J(t)$ is normally distributed (see, for example, RICE [16] and UHLENBECK and WANG [17]).

If J and J' have a Gaussian distribution then it follows from (II-15) that they are also statistically independent. The joint probability is the product of the distribution of J and J'

$$p_0(J) = [2\pi\varphi(0)]^{-1/2} \exp \left[-\frac{J^2}{2\varphi(0)} \right], \quad (\text{II-17a})$$

$$p_1(J') = [-2\pi\varphi''(0)]^{-1/2} \exp \left[+\frac{J'^2}{2\varphi''(0)} \right], \quad (\text{II-17b})$$

and

$$p_{01}(J, J') = p_0(J) p_1(J'). \quad (\text{II-18})$$

For more general cases (II-15) does not imply (II-18). If $J(t)$ denotes one component of the velocity fluctuations in turbulent flow, for example, it follows that because of the nonlinear terms in the equations of motion

$$\overline{(J')^3} \neq 0. \quad (\text{II-19})$$

Consequently J' can not have a Gaussian distribution in this case.

The application of the central limit theorem to the probability distribution of $J(t)$ is best seen by representing $J(t)$ as a Fourier-Stieltje's integral

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda), \quad (\text{II-20})$$

where $F(\lambda)$ is a stochastic function of λ . For stationarity it is necessary that the increments $dF(\lambda)$ be uncorrelated. This is seen by forming the correlation function

$$\varphi(\tau) = \overline{J(t) J(t + \tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda - \mu)t} e^{-i\mu\tau} \overline{dF(\lambda) dF^*(\mu)}. \quad (\text{II-21})$$

For a stationary process thus

$$\overline{dF(\lambda) dF^*(\mu)} = \overline{|dF(\lambda)|^2} \delta(\lambda - \mu)$$

and

$$\varphi(\tau) = \int e^{-i\lambda\tau} \overline{|dF(\lambda)|^2}. \quad (\text{II-22})$$

Comparing (II-22) with (II-4) shows that

$$\Phi(\lambda) d\lambda = \overline{|dF(\lambda)|^2}. \quad (\text{II-23})$$

If in addition to being uncorrelated the increments $dF(\lambda)$ are independent one can apply the central limit theorem to (II-20), considering $J(t)$ for any t as the limit of a sum of independent increments $\sim dF(\lambda)$. One concludes that $J(t)$ is normally distributed. For the application of the central limit theorem it is essential that $\overline{|dF(\lambda)|^2} \sim d\lambda$.

For linear systems it is thus often possible to assume a normal distribution. This is done, for example, in problems of the shot effect, Brownian motion, and black body radiation. In homogeneous turbulence the increments $dF(\lambda)$ are uncorrelated, but not independent. The central limit theorem does not apply.

8. Zeros and Extrema of a Stochastic Function

RICE [16] has obtained a formula for the number of times per unit time $N_0(\xi)$ a stochastic function $J(t)$ passes through the value ξ . $N_0(\xi)$ can be ex-

pressed in terms of the joint probability $p_{01}(\xi, \eta)$ of the function J and its derivative J'

$$N_0(\xi) = \int |\eta| p_{01}(\xi, \eta) d\eta. \quad (\text{II-24})$$

(II-24) expresses the fact that J spends the time $p_{01}(\xi, \eta) d\xi d\eta$ between ξ and $\xi + d\xi$ having a slope in the interval $\eta, \eta + d\eta$. The crossing of the interval $d\xi$ takes the time $\tau = d\xi / |\eta|$ and hence (II-24) results for the expected number of crossings, regardless of slope. Applying (II-24) to the derivative of J an analogous result can be found for $N_1(\eta)$, etc. Specifically, $N_0(0)$ gives the expected number of zeros of $J(t)$ per unit time, $N_1(0)$ the expected number of extrema.

(II-24) is important when one is interested in the number of times J reaches or exceeds a certain value ξ rather than the length of time ξ is exceeded. Structural fatigue problems are typical problems of this type.

For a double Gaussian distribution $N_0(0)$ is easily expressed as:

$$N_0(0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\bar{J}'^2}{\bar{J}^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\bar{\omega}^2}. \quad (\text{II-25})$$

Consider for the moment J as a velocity component, the independent variable t as a space variable, and ω as a wave number in space. Viscous dissipation of a wave in hydrodynamics is proportional to the square or mean square of the wave number. (II-25) can then be interpreted in the following way: the mean viscous dissipation of a one-dimensional, Gaussian, stochastic velocity field is equal to the dissipation of a harmonic wave having the same average number of zeros.

For a non-Gaussian process like turbulence (II-25) is not exactly correct. Measurements [91] show that the dissipation in turbulence is larger than the harmonic wave with an equal number of zeros. This is apparently due to the fact that the nonlinearity introduces a saw tooth character into the fluctuations. For the same number of zeros, the dissipation is then larger.

Mathematically it means that $p_{01}(\xi, \eta)$ is not the product $p_0(\xi) p_1(\eta)$ and not double Gaussian. The step from (II-24) to (II-25) can not be made.

9. Generalization to Homogeneous Fields in More Than One Dimension

In the study of homogeneous turbulence, vectors or tensors that are stochastic functions of vectors are needed. The concept of power spectrum and correlation function is easily extended. For example, to study isotropic, homogeneous turbulence, VON KÁRMÁN introduced the correlation tensors of various ranks. The correlation tensor $\varphi_{ij}(\vec{r})$, for example, is defined in terms of the velocity components u_i at two points $P_1(\vec{R})$ and $P_2(\vec{R} + \vec{r})$ by

$$\varphi_{ij}(\vec{r}) = \overline{u_i(\vec{R}) u_j(\vec{R} + \vec{r})}. \quad (\text{II-26})$$

Generalizing (II-3) and (II-4) we have

$$\Phi_{ij}(\vec{K}) = \frac{1}{8\pi^3} \int d\vec{r} \varphi_{ij}(\vec{r}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}, \quad \varphi_{ij}(\vec{r}) = \int d\vec{K} \Phi_{ij}(\vec{K}) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}}. \quad (\text{II-27})$$

There is no difficulty in extending this generalization further to tensors of higher rank and with more independent variables. In the following, for example, it will be useful to consider correlation tensors in space and time. In this case \vec{r} and \vec{K} are four-dimensional vectors.

In general, all properties of stationary processes, that is, processes that are homogeneous in time can be generalized to random fields which are homogeneous in space or in space and time. In dealing with homogeneous fields we will thus be able to use an ergodic property under similar conditions to those in Section II. 5¹⁾. Evidently relations similar to (II-12), (II-13), and (II-14) hold by virtue of (II-27) and suitable generalizations.

III. TURBULENCE EFFECTS UPON LINEAR SYSTEMS

In the following the response of linear systems to random forcing functions arising from turbulent fluctuations will be discussed. Turbulence acts as a random forcing function in a large variety of physical situations ranging from the motion of an airplane in gusty air to the scintillation of stars. Furthermore, the process of measuring turbulent fluctuations by means of a hot-wire anemometer or any other probe consists essentially in measuring the response of a system upon which the turbulent fluctuations act as an impressed force.

Broadly speaking, turbulent fluctuations will have similar effects for large scale phenomena as molecular fluctuations have for small scale phenomena. Hence one encounters macroscopic phenomena similar to Brownian motion, Rayleigh type scattering for radio waves, etc. In the measuring process, however, the phenomena encountered in turbulence differ from similar observations on molecular structures. For turbulence measurements it is possible in principle to keep the fluctuations within the measuring apparatus itself negligibly small. A separation between the measuring instrument and the fluctuations can be realized here. On the other hand, we are interested in much more detailed information concerning the fluctuations than is the case in most molecular fluctuation phenomena.

1. Use of the Correlation Functions and Power Spectra

We will assume in general that the fluctuations are homogeneous in time and space. Exceptions will be noted explicitly.

¹⁾ Actually, it is possible in this case to compute ensemble averages by averaging over one space coordinate only.

The correlation function appears in the discussion of the response of a system, due to the use of an integral representation and the averaging process. In one dimension let

$$v(T) = \int_0^T f(t) dt, \quad (\text{III-1})$$

then

$$\bar{v}^2(T) = \int_0^T \int_0^T \overline{f(t) f(t')} dt dt'. \quad (\text{III-2})$$

Because of homogeneity

$$\overline{f(t) f(t')} = \varphi(t - t')$$

where φ denotes the correlation function or "auto-correlation function" of f . Since φ depends only upon $|t - t'|$ the integral can be reduced to a single integral

$$\bar{v}^2 = 2 \int_0^T (T - \eta) \varphi(\eta) d\eta. \quad (\text{III-3})$$

(III-3) has two limiting cases which are often useful. $\varphi(\eta)$ may be nearly equal to $\varphi(0) \equiv \bar{f}^2$ in the interval $(0, T)$. That is, the correlation extends for long times. Then

$$\bar{v}^2(T) = \bar{f}^2 T^2 \quad (T \ll \theta) \quad (\text{III-4})$$

or else φ may drop to zero in a time $T_1 \ll T$. In this case put

$$\varphi(\eta) = \theta \delta(\eta) \bar{f}^2 \quad (\theta \sim T_1)$$

where δ is the Dirac delta-function. Then

$$\bar{v}^2(T) = 2 \bar{f}^2 T \theta. \quad (T \gg \theta) \quad (\text{III-5})$$

Equations (III-4) and (III-5) are, of course, well known in diffusion theory if $\bar{v}^2(T)$ is interpreted as the mean square displacement of a particle at the time T and \bar{f}^2 its mean square velocity. In this case the velocity is homogeneous in time, the displacement not. Similar results can be written immediately in space or in space and time.

2. Linear Langevin-Type Equations

Consider now a linear operator \mathfrak{L}_{ij} (for example, corresponding to a system of partial differential equations). Let $v_i(\vec{x})$ denote a vector field, $f_i(\vec{r})$ a forcing

function

$$\mathfrak{L}_{ij}(v_j) = f_i . \quad (\text{III-6})$$

For a stochastic \vec{f}_i , (III-6) is a generalized Langevin equation. For an infinite domain

$$v_i(\vec{x}) = \int d\vec{s} \gamma_{il}(\vec{s}) f_l(\vec{x} + \vec{s}), \quad (\text{III-7})$$

where $\gamma_{il}(\vec{s})$ denotes the fundamental solution of (III-6). For homogeneity it is necessary to assume constant coefficients in \mathfrak{L}_{ij} .

From (III-7) we obtain the mean square v_{ii} or the correlation $v_{ij}(\vec{r})$ exactly as in the simplest case given above (III-2). Thus

$$\overline{v_i(\vec{x} + \vec{r}) v_j(\vec{x})} = \int \int d\vec{s} d\vec{s}' \gamma_{il}(\vec{s}) \gamma_{jm}(\vec{s}') f_l(\vec{x} + \vec{r} + \vec{s}) f_m(\vec{x} + \vec{s}'). \quad (\text{III-8})$$

In this way the correlation function of the response v_{ij} can be expressed in terms of the correlation function of the forcing function f_{lm} :

$$v_{ij}(\vec{r}) = \int \int d\vec{s} d\vec{s}' \gamma_{il}(\vec{s}) \gamma_{jm}(\vec{s}') f_{lm}(\vec{r} + \vec{s} - \vec{s}'). \quad (\text{III-9})$$

Introducing the power spectrum tensors, V_{ij} and F_{ij} , of v_{ij} and f_{ij} , and Γ_{ij} defined by¹⁾

$$\Gamma_{ij}(\vec{K}) = \int d\vec{s} \gamma_{ij}(\vec{s}) e^{-i\vec{K}\vec{s}} \quad (\text{III-10})$$

we have

$$V_{ij}(\vec{K}) = \Gamma_{il}(\vec{K}) \Gamma_{jm}^*(\vec{K}) F_{lm}(\vec{K}) . \quad (\text{III-11})$$

\vec{r} and \vec{K} do not need to be three-dimensional vectors. If \mathfrak{L}_{ij} includes time derivatives $\dot{\vec{r}}$ will include time as one variable and \vec{K} the time angular frequency ω . If \mathfrak{L}_{ij} does not involve time derivatives, time enters into the problem as an external parameter only. In this case (III-11) can be written with a three-dimensional k

$$V_{ij}(\vec{k}, t) = \Gamma_{il}(\vec{k}, t) \Gamma_{jm}^*(\vec{k}, t) F_{lm}(\vec{k}, t) . \quad (\text{III-12})$$

(III-12) is similar to the equations given recently by UBEROI and KOVASZNAY [33] in slightly different terminology and derivation.

Equation (III-11) is the generalization of the relation linking the power spectrum $\Phi(\omega)$ of a forcing function $f(t)$ to the power spectrum of a response $v(t)$. In the latter case we have simply

$$V(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 \Phi(\omega) \quad (\text{III-13})$$

¹⁾ The Γ_{ij} are used in ZEILON's construction of the fundamental solution. See for example: FRANK and von MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Vol. 1. (F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1930), p. 865.

where $|I(\omega)|^2$ denotes the absolute square of the admittance of the circuit or operator linking $v(t)$ to $f(t)$. Similarly $\Gamma_{ij}(\vec{K})$ enters into the relation between V_{ij} and F_{ij} , the corresponding power spectrum tensors. Γ_{ij} is obtained from the operator \mathfrak{L}_{ij} in exactly the same way as the complex admittance is obtained from a one-dimensional operator: $\partial/\partial x_i$ is replaced by $i K_j$ in \mathfrak{L}_{ij} .

In general, problems involving boundaries of the region are more complicated. As an example, let \mathfrak{L}_{ij} include time derivatives. Some interesting situations lead to the problem where a forcing function $f_i(\vec{x}, t)$ which is homogeneous in space is switched on at time $t = 0$. The space correlation tensors $v_{ij}(\vec{r}, t)$ are to be computed as functions of time. An example of this type will be discussed later on.) We have

$$\mathfrak{L}_{ij}(v_j) = f_i \quad (t \geq 0), \quad f_j, v_j = 0 \quad (t < 0). \quad (\text{III-14})$$

Then

$$v_j(\vec{x}, t) = \int d\vec{s} \int_0^t d\sigma \gamma_{ji}(\vec{x} - \vec{s}, t - \sigma) f_i(\vec{s}, \sigma) \quad (\text{III-15})$$

or

$$\left. \begin{aligned} v_{ij}(\vec{r}, t) &= \int \int d\vec{s} d\vec{s}' \\ &\times \int_0^t \int d\sigma d\sigma' \gamma_{ii}(\vec{s}, t - \sigma) \gamma_{jm}(\vec{s}', t - \sigma') f_{lm}(\vec{r} + \vec{s} - \vec{s}', \sigma - \sigma'). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-16})$$

The relation for the spectral tensors becomes

$$V_{ij}(\vec{k}, t) = \int_0^t d\sigma d\sigma' \Gamma_{il}(\vec{k}, t - \sigma) \Gamma_{jm}(\vec{k}, t - \sigma') F_{lm}(\vec{k}, \sigma - \sigma'). \quad (\text{III-17})$$

Thus in this type of problem it is necessary to know the space-time correlation of the forcing function even if only the space correlation of the response is desired.

3. Some Typical Examples

(A) Hot-Wire Anemometer

Equation (III-6) describes the process of measurement of fluctuating phenomena in most instances. An elementary case is the response of a hot-wire anemometer exposed to the fluctuating velocity $u(t)$. Here the voltage $v(t)$ satisfies the approximate equation

$$M \frac{dv}{dt} + v = c u(t), \quad (\text{III-18})$$

where M denotes the so-called time constant of the hot-wire and c its sensitivity. Hence, the observation of the mean square voltage fluctuation yields

$$\overline{v^2} = c^2 \int_0^\infty \frac{\Phi(\omega)}{1 + M^2 \omega^2} d\omega, \quad \overline{u^2} = \int \Phi(\omega) d\omega. \quad (\text{III-19})$$

The so-called compensation method of hot-wire anemometry (DRYDEN and KUETHE [25]) consists in removing the factor $1 + M^2 \omega^2$ from (III-19) by a second properly chosen linear circuit. Let $v(t)$ denote the output of this second circuit

$$\mathfrak{L}(V) = v.$$

Then \mathfrak{L} has to be chosen such that $|\Gamma(\omega)|^2 = 1 + M^2 \omega^2$. Then

$$\overline{V^2} \approx \overline{u^2}.$$

For spectral measurements $|\Gamma(\omega)|^2$ has to possess a very sharp maximum for, say, $\omega = \omega_0$. If a circuit possesses this quality, (III-13) gives for the mean square response

$$\overline{v^2} = f(\omega_0) \int |\Gamma(\omega)|^2 d\omega.$$

If the scale of the fluctuations is not very large compared to the wire length we have to take into account that the wire averages over its length l . Hence the wire does not measure $u(t)$ but rather

$$U(t) = \frac{1}{l} \int_0^l u(t, z) dz. \quad (\text{III-20})$$

If only the mean square of u is required, or certain moments of the spectrum, the corrections are easily obtained. For example, we have in homogeneous turbulence (III-3)

$$\overline{U^2} = \frac{2}{l^2} \overline{u^2} \int_0^l (l - z) \varphi(z) dz. \quad (\text{III-21})$$

For short wires $\varphi(z)$ can be developed in powers of z and introducing the so-called microscale λ of isotropic turbulence, we find

$$\overline{U^2} = \overline{u^2} \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} + \dots \right].$$

For a very long wire we may apply the equivalent of (III-5) and find

$$U^2 = 2 \overline{u^2} \frac{A}{l},$$

where A now corresponds to the integral scale of turbulence.

For the measurements of spectrum and correlation functions the length corrections are considerably more involved. UBEROI and KOVASZNAY [33] have recently given a general approach to the problem using equations equivalent to (III-11) or (III-12). They found the correction for wire length in the measurement of the one-dimensional spectrum of isotropic turbulence:

$$\mathcal{F}_1(k_1) = \frac{l^2}{4} \int_{k_1}^{\infty} W\left(\frac{l}{2}\sqrt{k^2 - k_1^2}\right) \frac{E(k)(k^2 - k_1^2)}{k^3} dk, \quad (\text{III-22})$$

where $\mathcal{F}_1(k_1)$ denotes the one-dimensional power spectrum as measured with a wire of length l . $E(k)$ is the three-dimensional spectrum, $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, and W a function defined by

$$W(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{dy}{\sqrt{x^8 - y^8}}. \quad (\text{III-23})$$

In [33], $W(x)$ is plotted and several special cases are discussed. An interesting result is obtained if the true spectrum is assumed to be of the form k_1^{-n} . In this case it is shown that the measured spectrum at high frequencies approaches the form $k_1^{-(n+1)}$. This is an important result with respect to comparison of spectrum measurements with theoretical results concerning the form of the spectra where the exponent n is often of primary concern.

(B) The Effect of Turbulence Upon the Propagation of Waves

Turbulence in the atmosphere, in wind tunnels, etc. will cause fluctuations in the refractive index for the propagation of waves. The velocity fluctuations themselves as well as the temperature fluctuations will amount to variations in the propagation velocity for sound waves while the fluctuations in density and temperature will cause fluctuations in the refractive index for electromagnetic radiation. Problems of this type have become rather important in recent years and a number of investigations have been carried out ([20] to [22], [27], [29] to [32]). Here a few typical effects will be discussed. We have to distinguish between two types of problems: the effect of the fluctuations may appear mainly as a "noise problem", that is, the interest may lie in the primary signal while turbulence causes mainly a disturbance and diffusion of this signal. Or else the disturbance in a primary signal or wave may be used to obtain information about the turbulence pattern itself. Especially simple cases occur when either the wave length of the radiation is small compared to the scale of turbulence and geometrical optics applies, or the scale of turbulence is small compared to the wave length and we deal with a problem in diffraction.

The Passage of a Light Ray Through a Turbulent Boundary Layer

As a simple problem consider the diffusion of a ray of light which traverses a boundary layer of thickness δ . Assume the incident ray normal to the layer, in the direction x . Within the layer the refractive index n is assumed to be of the form

$$n = n_0(x) [1 + n_1(z, y, z, t)] , \quad \bar{n} = n_0(x) . \quad (\text{III-24})$$

The unit vector \vec{s} in the direction of the light ray can be written

$$\vec{s} = \vec{l}_1 + \vec{\alpha} , \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{l}_1 = 0 .$$

For small n_1 and $\vec{\alpha}$ it follows from the geometrical optical equation:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dx} = -\frac{1}{n_0} \cdot \frac{dn_0}{dx} \vec{\alpha} + \nabla_2 n_1 , \quad (\text{III-25})$$

where

$$\nabla_2 n_1 \equiv \nabla n_1 - \frac{\partial n_1}{\partial x} \vec{l}_1 .$$

(III-25) corresponds to diffusion in a field of force. The force field is due to the mean gradient of n . Here n_1 is homogeneous in space and time. $\vec{\alpha}$ is homogeneous in time, but not in space. Integrating, squaring and averaging of (III-25) yields

$$\overline{\alpha^2} = [n_0(\delta)]^{-2} \int_0^\delta \int n_0(x) n_0(\xi) \overline{(\nabla_2 n_1)_x (\nabla_2 n_1)_\xi} dx d\xi . \quad (\text{III-26})$$

The ray is assumed to enter at $x = 0$. For homogeneous turbulence of a scale A with $A/\delta \ll 1$ and with $(\partial n_1 / \partial y)^2 = (\partial n_1 / \partial z)^2$ this yields

$$\overline{\alpha^2} = 4 \overline{n_1^2} \frac{\delta}{A} \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\frac{n_0(x)}{n_0(\delta)} \right)^2 dx . \quad (\text{III-27})$$

(III-26) applies, for example, to the effect of "noise" caused by wind tunnel turbulence upon the performance and ultimate resolution of a schlieren system and similar problems with electromagnetic waves or sound.

Optical Measurement of Turbulence

KOVASZNAY [26] has shown that a shadowgraph taken of a field of turbulent density fluctuations can be used to determine the correlation function of the density fluctuations.

Assume a shadowgraph is taken at $x = 0$ of a layer extending from $x = 0$ to $x = l$. The relative light intensity distribution $h(y, z)$ on the plate is related

to the refractive index n by

$$h(y, z) = \text{const} \int_0^l V_2^2 n \, dx, \quad (\text{III-28})$$

where

$$V_2^2 = \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}.$$

KOVASZNAY prepares two identical photographic slides. From the transparency of these two plates placed face to face he obtains the correlation function $h_{\eta\zeta}$ by displacing one with respect to the other. From (III-28) then follows,

$$h_{\eta\zeta} = h(y, z) h(y + \eta, z + \zeta) = \text{const} \int_0^l \int [V_2^2(n)]_{x,y,z} (V_2^2 n)_{\xi,y+\eta,z+\zeta} \, dx \, d\xi. \quad (\text{III-29})$$

For small scale isotropic and homogeneous turbulence KOVASZNAY finds, for example, that the three-dimensional spectrum of the refractive index fluctuations $E(k)$ is related to the measured correlation function from the photographs by

$$k^2 E(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty r \beta(r) J_0(kr) \, dr \quad (\text{III-30})$$

where $\beta(r) = h_{\xi,\eta} - h_{0,0}$, and J_0 is the Bessel function of the first kind and of zero order.

Dipole Scattering of Electromagnetic Waves [21]

The dipole moment $\vec{\pi}$ of a volume v due to an electric field strength \vec{E} and a fluctuation in the dielectric constant D is given by

$$\vec{\pi}(t) = \int_v D(\vec{x}, t) \vec{E}(\vec{x}, t) \, d\vec{x}.$$

The scattered radiation becomes proportional to

$$|\vec{\pi}|^2 = \int \int D(\vec{x}, t) D(\vec{x}', t) \vec{E}(\vec{x}, t) \vec{E}(\vec{x}', t) \, d\vec{x} \, d\vec{x}'. \quad (\text{III-31})$$

$\vec{\pi}^2$ can thus be expressed in terms of the correlation function of D and related to turbulent density fluctuations. Specifically, for fluctuations with a length scale A small compared with the wave length of the radiation and which varies slowly in time we can put

$$\overline{D(\vec{x}, t) D(\vec{x}', t)} = \overline{D^2} A^3 \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (\text{III-32})$$

and hence

$$\overline{\pi^2} = E^2 A^3 v D^2 \quad (\text{III-33})$$

equivalent to Rayleigh scattering from very small scatterers.

In more general terms, scattering due to turbulent fluctuations of the refractive index can be put into the form of (III-6) by considering the Maxwell equations with a refractive index involving a small time and space dependent perturbation. The perturbation terms are then considered the forcing function (III-6).

Thus, again writing n_1 for the fluctuation in refractive index we have, for example, the equation for \vec{E}

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 2 \frac{n_1}{c^2} n_0^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla (\vec{E} \nabla n_1). \quad (\text{III-34})$$

Writing $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{e}$ where \vec{e} denotes a small perturbation due to the presence of the fluctuations n_1 , (III-34) can be brought in the form of (III-6)

$$\mathfrak{L}(e_i) = f_i \quad (\text{III-35})$$

with

$$f_i = \frac{2 n_1}{c^2} n_0^2 \frac{\partial^2 E_{0i}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{E}_0 \nabla n_1)$$

and the general formalism outlined above applies to the approximate system (III-35).

Production of Sound by Turbulence

Turbulent fluctuations in an incompressible fluid represent pure shear motion or transversal waves. In a compressible fluid the longitudinal pressure waves and the transversal shear waves are coupled and hence a turbulent field will be coupled with a sound field. The feeding of energy from turbulence into sound is a very important problem of turbulence in high-speed and especially supersonic flows. Indeed, probably the only important difference of turbulent motion at high speeds as compared to low-speed turbulence is this coupling with a longitudinal pressure field. The problem of sound production from turbulent fluctuations has recently been attacked in a general way by Lighthill [30]. In this problem the forcing function in the sound wave equations comes from the turbulent, Reynolds stresses. The equation discussed by Lighthill is

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \varrho = \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j},$$

where ϱ denotes the density of the fluid and a the velocity of sound. τ_{ij} is a stress tensor, to which the largest contribution comes from the turbulent fluctuations.

The radiated acoustic power then involves correlations of the derivatives of τ_{ij} . It is interesting to note that LIGHTHILL is able to make reasonable predictions for the dependence of the radiative power on velocity of the flow, Mach number, etc. without a detailed knowledge of the turbulent stresses.

(C) *The Effect of Turbulence Upon the Motion of Solid Bodies*

A falling rain drop, an airplane moving in gusty air, smoke stacks in the wind, etc. execute on a macroscopic scale a type of motion analogous to Brownian motion in small scale. There are, however, essential differences mainly due to frequency characteristics of the forcing function as compared to the proper frequencies of the systems. In Brownian motion and related phenomena we mostly assume a white power spectrum of the fluctuating force. A white spectrum is equivalent to a δ -function for the correlation function. It has been seen above how much the formalism is simplified if the correlation length or time is short compared to the characteristic dimensions of the system. Another great simplification in Brownian motions results from the fact that the probability distribution can be assumed normal or simply related to a normal distribution. In turbulence this is often not even a good approximation. Finally, the forcing function and the damping in Brownian motion result from the same general molecular mechanism. Any dissipation appears in heat and thus in the forcing function. This fact is material in the trend toward equipartition of energy. In the turbulent counterpart to Brownian motion the forcing function and the damping may involve quite different mechanisms. The dissipated kinetic energy of a fluctuating rigid system may go directly into heat or may pass through a stage of turbulence. Only the latter case is closely similar to Brownian motion.

Consider, for example, an airplane moving through gusty air as a system under the influence of a random forcing function. Then it is clear that the system is sensitive mainly to a medium range of frequencies of gusts. The very slow gusts are counteracted by the pilot while the very rapid gusts are averaged out by the size of the plane. Hence, a problem like this corresponds to the behavior of a system, which has a generalized admittance which vanishes for very small and very high wave numbers, in a field of forces characterized by a specific generalized power spectrum. So far the state of turbulence in the atmosphere has not been known with sufficient accuracy and in sufficient detail to provide the necessary information for treating such a problem. Much progress has been made in the last few years. In some recent investigations the response of an airplane was actually used to obtain the spectrum of turbulence in the atmosphere [24]. Measurements like these correspond roughly to, say, KAPPLER's determination of the Avogadro number from the Brownian motion of a torsional balance.

In the example of the airplane it is obviously of great importance to know also the probability distribution of the atmospheric turbulence as well as the "filtered" distribution function of, say, the stress at some part of the structure resulting from the gusts. Even if the systems considered are assumed linear this problem is by no means trivial. For structural fatigue considerations we require also the number of reversals of a given load, a problem related to the number of zeros or extrema of a random function.

(D) The Effect of Turbulence of a Conducting Fluid on a Magnetic Field

Isotropic, homogeneous turbulence in a conducting fluid and its influence on a magnetic field \vec{H} has been the subject of several recent studies ([19] and [23]). In these studies the approximate equations governing the behavior of a magnetic field in a moving conductor are usually put into a form similar to the KÁRMÁN-HOWARTH equation in turbulence (Section V). The statistical properties are then discussed along the lines of isotropic turbulence theory. Here a different problem is discussed. The approximate equations for the magnetic field \vec{H} in a turbulent conducting fluid with conductivity σ and permeability μ are

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \vec{H} = \operatorname{curl} (\vec{u} \times \vec{H}) \quad (\text{III-37})$$

here $\lambda = (4\pi\mu\sigma)^{-1}$ and $\vec{u}(\vec{x}, t)$ is the turbulent velocity field. \vec{H} is assumed zero for $t < 0$. At $t = 0$ a constant field \vec{H}_0 is switched on. The perturbation field $\vec{h} = \vec{H} - \vec{H}_0$ due to the turbulence will be studied. Here we deal with a typical example for which the operator includes a time derivative and where a homogeneous forcing function is switched on at $t = 0$. Choosing $\vec{H}_0 \parallel x_1$, we have, since $\operatorname{div} \vec{u} = 0$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} - \lambda \nabla^2 h_i = H_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = f_i H_0. \quad (\text{III-38})$$

From (III-17) we obtain the following equation for the spectral tensor of h , H_{ij}

$$H_{ij}(\vec{k}, t) = H_0^2 \int_0^t \int d\sigma d\sigma' \Gamma(k, t - \sigma) \Gamma^*(k, t - \sigma') F_{ij}(\vec{k}, \sigma - \sigma'). \quad (\text{III-39})$$

$\Gamma(k, t)$ is the space Fourier transform of the fundamental solution $\gamma(\vec{x}, t)$ defined by

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \gamma = \delta(\vec{x}) \delta(t), \quad \gamma(0) = 0. \quad (\text{III-40})$$

Thus

$$\Gamma(k, t) = e^{-\lambda k^2 t}. \quad (\text{III-41})$$

(III-39) becomes

$$H_{ij}(\vec{k}, t) = H_0^2 \int_0^t d\sigma d\sigma' e^{-\lambda k^2(2t-\sigma-\sigma')} F_{ij}(\vec{k}, \sigma - \sigma') \quad (\text{III-42})$$

or

$$H_{ij}(\vec{k}, t) = 2 H_0^2 \frac{e^{-\lambda k^2 t}}{\lambda k^2} \int_0^t \sinh(\lambda k^2 \sigma) F_{ij}(\vec{k}, t - \sigma) d\sigma. \quad (\text{III-43})$$

F_{ij} is the space Fourier transform of the space-time correlation f_{ij} . The space-time correlation tensor of $\partial u_i / \partial x_1$ does not appear to be easy to write down in general. Thus, only two limiting simple cases are considered here. If

$$F_{ij}(\vec{k}, t) = F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) T \delta(t) \quad (\text{III-44})$$

then

$$H_{ij} = H_0^2 F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \frac{T}{\lambda k^2} [1 - e^{-2\lambda k^2 t}]. \quad (\text{III-45})$$

If

$$F_{ij}(\vec{k}, t) = F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \quad (\text{III-46})$$

then

$$H_{ij} = H_0^2 F_{ij}^{(1)}(\vec{k}) \frac{1}{\lambda^2 k^4} [1 - e^{-\lambda k^2 t}]^2. \quad (\text{III-47})$$

These two extreme cases differ in the characteristic time; in (III-45) the time scale of the forcing function enters while in (III-47) the only characteristic time is λk^2 . Both are proportional to $F_{ij}(\vec{k})$ which is related to the spectrum tensor $\Phi_{ij}(\vec{k})$ of isotropic homogeneous turbulence (see Section IV) by

$$F_{ij}(\vec{k}) = k_1^2 \Phi_{ij}(\vec{k}). \quad (\text{III-48})$$

The magnetic field increases with time and the perturbation reaches a steady state provided of course that the turbulence is kept up by an external agent. The ultimate magnetic energy in the perturbation and the spectral distribution depends upon the space and time correlation of the turbulence.

In the cases studied by BATCHELOR [19] and CHANDRASEKHAR [23] the increase and steady state of a weak random field is discussed. The comparison of their results with (III-42), etc. is therefore not directly possible. The mechanism responsible for the increase in field strength is, however, the same.

BIBLIOGRAPHY¹⁾*I. General*

- [1] AGOSTINI, L., and BASS, I., *Les Théories de la Turbulence*, Publ. sci. techn. Minist. Air, Paris (1950).
- [2] BATCHELOR, G. K., *Recent Developments in Turbulence Research*, Proc. VIIth int. Congr. appl. Mech., London (1948).
- [3] CHUANG, F. K., COLE, J. D., and ROSHKO, A., *On the Statistical Theory of Turbulence*, Final Report NACA Contract NAW-5777, Calif. Inst. Techn. (1951).
- [4] CUMMING, BETTY L., *A Review of Turbulence Theories*, Australian Council sci. and indust. Res., Report No. ACA-27 (1946).
- [5] DRYDEN, H. L., *Some Recent Contributions to the Study of Transition and Turbulent Boundary Layers*, NACA T. N. 1168 (1947).
- [6] DRYDEN, H. L., *A Review of the Statistical Theory of Turbulence*. Quart. appl. Math. 1, 7 (1943).
- [7] GOLDSTEIN, S. (Ed.), *Modern Developments in Fluid Dynamics* (Oxford University Press, 1938).
- [8] KÁRMÁN, TH. VON, and LIN, C. C., *On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence*, in: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. II (Academic Press, New York, 1951).
- [9] PILLOW, A. F., *A Review of Hydrodynamical Stability and its Bearing on Transition to Turbulent Flow in the Boundary Layer*, Australian Council sci. and indust. Res., Report A-35 (1945).
- [10] "Problems of Cosmical Aerodynamics", Proceedings of the Symposium on the Motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions, Paris (1949). Central Air Document Office, Dayton, Ohio (1951).
- [11] SCHLICHTING, H., *Grenzschicht-Theorie* (G. Braun, Karlsruhe, 1950).

Part II

- [12] CHANDRASEKHAR, S., *Stochastic Processes in Physics and Astronomy*, Rev. modern Phys. 15, 1 (1943).
- [13] CRAMER, H., *Mathematical Methods in Statistics* (Princeton University Press, 1951).
- [14] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1950).
- [15] KAMPÉ DE FÉRIET, J., *Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible*, C. r. Acad. Sci. Paris 227, 760 (1948).
- [16] RICE, S. O., *Mathematical Analysis of Random Noise*, Bell Techn. J. 23, 282 (1944); 24, 46 (1945).
- [17] WANG, M. C., and UHLENBECK, G. E., *On the Theory of Brownian Motion*, Rev. modern Phys. 17, 323 (1945).
- [18] WIENER, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series* (John Wiley & Sons, New York, 1950).

¹⁾ No attempt is made to include a complete list of references. It is hoped, however, that the list of references gives a representative survey of recent work in turbulence. The references are arranged according to the parts of the paper.

Many of the American papers are published by the National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, D.C.; T.N. and T.R. refer to "Technical Note" and "Technical Report" of the Committee respectively. The notes and reports are available from the NACA.

Part III

- [19] BATCHELOR, G. K., *On the Spontaneous Magnetic Field in a Conducting Liquid in Turbulent Motion*, Proc. Royal Soc. [A], 201, 405 (1950).
- [20] BERGMANN, P. G., *Propagation of Radiation in a Medium with Random Inhomogeneities*, Phys. Rev. 70, 486 (1946).
- [21] BOOKER, H. G., and GORDON, W. E., *A Theory of Radio Scattering in the Troposphere*, Proc. Inst. Radio Eng. 38, 401 (1950).
- [22] CHANDRASEKHAR, S., *A Statistical Basis for the Theory of Stellar Scintillation*, Proc. Royal Astron. Soc. (in press).
- [23] CHANDRASEKHAR, S., *The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics*, Proc. Royal Soc. [A] 204, 435 (1950); 207, 301 (1951).
- [24] CLEMENTSON, G. C., *An Investigation of the Power Spectral Density of Atmospheric Turbulence*, Ph. D. Thesis, Mass. Inst. Techn. (1950).
- [25] DRYDEN, H. L., and KUETHE, A. M., *The Measurement of Fluctuations of Air Speed by the Hot-Wire Anemometer*, NACA T. R. 320 (1929).
- [26] KOVASZNAY, L. S. G., *Technique for the Optical Measurement of Turbulence in High Speed Flow*, Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. (ASME), Berkeley, Calif. (1949).
- [27] LIEBERMANN, L., *Effect of Temperature Inhomogeneities in the Ocean on the Propagation of Sound*, J. acoust. Soc. 23, 563 (1951).
- [28] LIEPMANN, H. W., *On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem*, J. aeron. Sci. (1952) (in press).
- [29] LIEPMANN, H. W., *The Deflection and Diffusion of a Light Ray Passing Through a Boundary Layer*, Douglas Aircraft Co., Inc., Report SM-14397 (1952).
- [30] LIGHTHILL, M. J., *On Sound Created Aerodynamically*, I: *General Theory*, Proc. Royal Soc. [A], 211, 564 (1952).
- [31] PEKERIS, C. L., *Note on Scattering in an Inhomogeneous Medium*, Phys. Rev. 71, 268 (1947).
- [32] OBUKHOV, A., *Über die Schallstreuung in der turbulenten Strömung*, C. r. Doklady U. S. S. R. 30, 616 (1941).
- [33] UBEROI, M. S., and KOVASZNAY, L. S. G., *Influence of Resolving Power on Measurement of Correlations and Spectra of Random Fields*, Project Squid, Techn. Report 30 (1952) Johns Hopkins University.

(Received: July 7, 1952.)

(To be continued in ZAMP III/6)

Impulsive Motion of an Infinite Plate in a Viscous Compressible Fluid¹⁾

By MILTON D. VAN DYKE, Pasadena, Calif.²⁾

1. Introduction

One of the standard solutions of incompressible viscous flow is the motion due to an infinite flat plate impulsively started moving in its own plane with uniform velocity. Admitting compressibility greatly complicates this simple problem. Viscous dissipation heats the fluid, producing pressure and density gradients and velocities normal to the plate which culminate in a receding shock wave.

One method of attacking this problem is to linearize the equations of motion for small values of the Mach number M . This approach, initiated by LAGERSTROM, COLE, and TRILLING [1]³⁾, was generalized and carried to fruition by HOWARTH [2], who succeeded in calculating values of the pressure on the plate. The method yields a perturbation field proportional to M^2 , and perhaps represents the first step of a series solution in powers of M^2 . HOWARTH also investigated the initial stages of the motion using the full equations.

Another method of attacking the problem is to start with the boundary layer approximation, which is useful for large time. The resulting solution is not limited to small M^2 , but is valid for arbitrarily high Mach numbers provided the time elapsed since the start of the motion is correspondingly large. ILLINGWORTH [3] has given the boundary layer solution, and STEWARTSON [4] has also briefly discussed its effect upon the outer flow field.

In the present paper the boundary layer solution is improved in a systematic manner. The procedure involves alternately iterating upon the boundary layer solution in the boundary layer and upon the acoustic solution in the outer flow field. The two solutions are matched at the outer edge of the boundary layer by comparing their asymptotic expansions. For simplicity, the assumptions are made of Prandtl number equal to 1, linear variation of viscosity

¹⁾ Research prepared under Office of Naval Research Contract N 6 ONR-244, Task Order VIII, Project NR 061-036.

²⁾ Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology. At present, Aeronautical Research Scientist, N.A.C.A. Ames Aeronautical Laboratory, Moffett Field, California.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 353.

with enthalpy, and an insulated plate. The results complement HOWARTH's solution, and agree with it in the region of common validity. The third approximation is carried out in detail. Interaction between the boundary layer and the outer flow field is found to reduce the skin friction.

The author is indebted to P. A. LAGERSTROM, who suggested the problem and guided the present study, and to LESTER LEES, who offered helpful criticism.

2. Transformation of Equations

Suppose an infinite insulated flat plate lies initially at rest on the plane $y = 0$ in a viscous compressible heat-conducting fluid. At time $t = 0$ it is set impulsively into motion in its own plane, moving in the positive x -direction with uniform velocity U . The velocity components u and v , pressure ϕ , density ϱ , and enthalpy i depend only upon y and t . The equations of continuity, momentum, energy, and state are

$$\varrho_t + (\varrho v)_y = 0 , \quad (1a)$$

$$\varrho (u_t + v u_y) = (\mu u_y)_y , \quad (1b)$$

$$\varrho (v_t + v v_y) = \frac{4}{3} (\mu v_y)_y - \dot{\phi}_y , \quad (1c)$$

$$\varrho (i_t + v i_y) - (\dot{\phi}_t + v \dot{\phi}_y) = \mu \left(u_y^2 + \frac{4}{3} v_y^2 \right) + \frac{1}{\sigma} (\mu i_y)_y , \quad (1d)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varrho i . \quad (1e)$$

Here the viscosity μ and thermal conductivity λ depend only upon the enthalpy, and the Prandtl number $\sigma = \mu c_p / \lambda$ is assumed to be constant. The appropriate boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} u(y, 0) &= v(y, 0) = 0 , & u(0, t) &= U , & (t > 0) \\ i(y, 0) &= i_0 , & v(0, t) &= 0 , \\ \dot{\phi}(y, 0) &= \dot{\phi}_0 , & i_y(0, t) &= 0 , \\ \varrho(y, 0) &= \varrho_0 , \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where subscript 0 indicates values in the initially undisturbed fluid.

It is convenient to transform the co-ordinate normal to the plate, introducing in place of y and t new independent variables Y and T defined by

$$Y = \int_0^y \frac{\varrho}{\varrho_0} dy , \quad T = t . \quad (3)$$

Then

$$\left. \begin{aligned} y_T &= -\frac{\varrho_0}{\varrho} Y_t, & y_Y &= \frac{\varrho_0}{\varrho}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T} + Y_t \frac{\partial}{\partial Y}, & \frac{\partial}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varrho_0}{\varrho} Y_t \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial Y}, & \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\varrho_0}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

The role of this transformation is to simplify the operator $\partial/\partial t + v(\partial/\partial y)$ which appears in equations (1). Thus, integrating the continuity equation (1a) between 0 and y gives

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} v = - \int_0^y \frac{\varrho_t}{\varrho_0} dy = - Y_t \quad (5)$$

so that

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6)$$

The solution is further simplified by assuming that the viscosity is proportional to the enthalpy so that according to the equation of state (1e)

$$\frac{\varrho \mu}{\varrho_0 \mu_0} = \frac{p}{p_0}. \quad (7)$$

Then the momentum and energy equations (1b) to (1d) reduce to

$$u_T = v_0 \left(\frac{p}{p_0} u_Y \right)_Y, \quad (8a)$$

$$v_T = \frac{4}{3} v_0 \left(\frac{p}{p_0} v_Y \right)_Y - \frac{p_Y}{p_0}, \quad (8b)$$

$$i_T - \frac{p_T}{\varrho} = v_0 \frac{p}{p_0} \left(u_Y^2 + \frac{4}{3} v_Y^2 \right) + \frac{v_0}{\sigma} \left(\frac{p}{p_0} i_Y \right)_Y, \quad (8c)$$

where $v_0 = \mu_0/\varrho_0$.

3. Boundary Layer Solution

For purposes of iterating upon the boundary layer solution, the last three equations are written as

$$\frac{p_Y}{p_0} = \frac{4}{3} v_0 \left(\frac{p}{p_0} v_Y \right)_Y - v_T, \quad (9a)$$

$$u_T - v_0 u_{YY} = v_0 \left(\frac{p - p_0}{p_0} u_Y \right)_Y, \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} i_T - v_0 u_Y^2 - \frac{\nu_0}{\sigma} i_{YY} &= v_0 \frac{p - p_0}{p_0} u_Y^2 + \frac{4}{3} \nu_0 \frac{p}{p_0} v_Y^2 \\ &\quad + \frac{p_T}{\varrho} + \frac{\nu_0}{\sigma} \left(\frac{p - p_0}{p_0} i_Y \right)_Y. \end{aligned} \quad (9c)$$

(The first two have been interchanged so that the iteration scheme proceeds in order.)

For large time, that is, large values of the "Reynolds number",

$$R = \frac{U^2 t}{\nu_0} \quad (10)$$

the right-hand sides of these equations can be neglected. Then according to the first equation (9a) the pressure is constant through the boundary layer:

$$p = p_0. \quad (11)$$

The second equation (9b) is identical with the equation for the incompressible problem, which has the solution

$$u = U \operatorname{ERFC} \eta \quad (12a)$$

where

$$\eta = \frac{Y}{2 \sqrt{\nu_0 T}}. \quad (12b)$$

The general solution of the third equation (9c) for enthalpy has been given by ILLINGWORTH [3]. However, the result is greatly simplified if the Prandtl number σ is assumed to be 1. Then, as first shown by CROCCO [5], the enthalpy is a quadratic function of u alone. With the present boundary conditions

$$i = i_0 + U u - \frac{1}{2} u^2. \quad (13)$$

Because the pressure is constant to a first approximation, it follows that

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} - \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{i}{i_0} = 1 + (\gamma - 1) M^2 \operatorname{ERFC} \eta \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ERFC} \eta \right). \quad (14)$$

Here the Mach number M is the ratio of the speed of the plate U to the speed of sound in the undisturbed fluid, which is given by $c_0^2 = (\gamma - 1) i_0$.

These results are expressed in terms of the distorted normal co-ordinate Y , whose relationship to the physical co-ordinate y can now be determined. According to equation (4), $y_Y = \varrho_0/\varrho$, so that integrating equation (14) with respect to Y gives

$$\begin{aligned} y &= Y \left[1 + (\gamma - 1) M^2 \left(\operatorname{ERFC} \eta - \frac{1}{2} \operatorname{ERFC}^2 \eta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{1}{\eta} \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

The normal velocity v in the boundary layer can now be determined from the continuity equation. According to equations (4) and (5), $v = y_T$, so that differentiating equation (15) gives

$$\frac{v}{U} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{U^2 T}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta - e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \right). \quad (16)$$

As usual in boundary layer theory, the condition that v vanishes far from the plate has been given up. Infinite values of η should be interpreted as referring not to the undisturbed flow, but to conditions at the outer edge of the boundary layer. Therefore, the normal velocity just outside the boundary layer is

$$\frac{v}{U} \Big|_{\eta=\infty} = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{U^2 T}} \quad (17)$$

and the displacement thickness δ is

$$\delta(t) = \int_0^t v \Big|_{\eta=\infty} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\gamma - 1) M^2 \sqrt{v_0 T}. \quad (18)$$

4. Outer Flow Field

The velocity component u parallel to the plate vanishes exponentially as $\eta \rightarrow \infty$, so that at the outer edge of the boundary layer there exists only a normal velocity component. Therefore, to a first approximation, the flow field outside the boundary layer is that which would result from moving the plate normal to itself with the velocity given by equation (17). If the structure of the receding shock wave were of interest, this problem should be solved including the effects of viscosity. For example, linearizing the equations would lead to a piston problem of the sort treated in Ref. [1], Section 2.2. However, for purposes of improving the solution in the boundary layer, it is sufficient in the first step to treat the outer flow as an acoustical problem.

For purposes of iterating upon the acoustic solution, equations (1) are written as

$$\left. \begin{aligned} \varrho_t + \varrho_0 v_y &= (\varrho_0 - \varrho) v_y - v \varrho_y, \\ \varrho_0 u_t &= (\varrho_0 - \varrho) u_t - \varrho v u_y + (\mu u_y)_y, \\ \varrho_0 v_t + p_y &= (\varrho_0 - \varrho) v_t - \varrho v v_y + \frac{4}{3} (\mu v_y)_y, \\ \varrho_0 i_t - p_t &= (\varrho_0 - \varrho) i_t - \varrho v i_y + v p_y + \mu \left(u_y^2 + \frac{4}{3} v_y^2 \right) + (\mu i_y)_y. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Neglecting the right-hand sides leads to the acoustic equation for v :

$$v_{yy} - \frac{1}{c_0^2} v_{tt} = 0. \quad (20)$$

The appropriate initial and boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} v(y, 0) &= v_t(y, 0) = 0, \\ v(0, t) &= \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{t}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

As usual, the boundary condition has been imposed at the plane $y = 0$ rather than at $y = \delta(t)$. Thus the edge of the boundary layer is represented by $\eta = \infty$ for the boundary layer solution, but by $y = 0$ for the outer flow solution. The solution of this problem is

$$v = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{t - y/c_0}} \quad (22)$$

for $t > y/c_0 \geq 0$ and $v = 0$ otherwise. The corresponding result for the pressure is found to be

$$p = p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \rho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{t - y/c_0}}. \quad (23)$$

In order that this solution may later be matched with the boundary layer solution, it is expanded in series for small values of $y/c_0 t$, and then expressed in terms of the boundary layer variables T and η , which gives

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \rho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{t}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{c_0 t} + \dots \right] \\ &= p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \rho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{T}} + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \rho_0 v_0 \frac{y}{T} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

5. Second Approximation for Pressure in Boundary Layer

Having found a first approximation for the outer flow field, we return to the boundary layer. There a second approximation can be obtained by iteration. Thus, substituting the first approximations for p [equation (11)] and v [equation (16)] into the right-hand side of equation (9a) and integrating with respect to Y gives

$$p = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\pi}} M^2 \frac{\rho_0 v_0}{T} \left(\frac{1}{3} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \operatorname{ERF} \sqrt{2\eta} \right) + h(T) \quad (25)$$

where $h(T)$ is an arbitrary function which must be determined by matching with the outer flow solution. Now for large η this is approximately

$$p = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \rho_0 v_0 \frac{\eta}{T} + h(T), \quad (26)$$

which can be matched with the outer flow solution of equation (24) by proper choice of the function $h(T)$. The agreement between terms of order v_0 is deceptive; the result is actually correct only to order $v_0^{1/2}$, so that the main term in equation (25) cannot be used at this stage. Hence the second approximation for pressure in the boundary layer is

$$p = p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 \pi}} M^2 \rho_0 c_0 \sqrt{\frac{v_0}{T}}. \quad (27)$$

At the surface of the plate ($\eta = 0$) the pressure increase is

$$\frac{p_s - p_0}{p_0} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{M^2}{c_0} \sqrt{\frac{v_0}{T}} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2 \pi}} \cdot \frac{M^3}{\sqrt{R}}. \quad (28)$$

This is precisely the asymptotic result for large time found by HOWARTH [2] using the method of linearization for small M^2 . His solution is based upon the assumption that $\sigma = 3/4$ rather than 1, which suggests that the result is independent of Prandtl number.

6. Second Approximation for u in Boundary Layer

Let the second approximation for tangential velocity be $u + u'$, where u is the first approximation given by equation (12), and u' is a small correction term. Substituting the first approximation for u and the second approximation for p into the right-hand side of equation (9b) gives

$$u'_T - v_0 u'_{YY} = \frac{\gamma (\gamma - 1)}{\sqrt{2 \pi}} M^3 \sqrt{v_0} \frac{1}{T^{3/2}} \eta e^{-\eta^2}. \quad (29)$$

The correction must not disturb the already correct initial and boundary values, so that

$$u'(y, 0) = u'_t(y, 0) = u(0, t) = 0. \quad (30)$$

The solution of this problem is found to be

$$u' = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \gamma (\gamma - 1) M^3 \sqrt{\frac{v_0}{T}} \eta e^{-\eta^2}, \quad (31)$$

which again vanishes exponentially as $\eta \rightarrow \infty$.

In the same way, iterating upon equation (9c) leads to a second-order correction to enthalpy in the boundary layer to be added to the first approximation of equation (13):

$$i' = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M U \sqrt{\frac{v_0}{T}} \left(1 + \frac{2\gamma}{V\pi} M^2 \eta e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \right). \quad (32)$$

Here the initial condition $i = i_0$ at $t = 0$ has been given up in favor of requiring the solution to approach the acoustic value at the outer edge of the boundary layer.

Next, improved values of ϱ and Y can be calculated, and then a second-order correction to normal velocity is found which is to be added to the first approximation of equation (16):

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{M^2}{c_0} \cdot \frac{v_0}{T} \\ &\times \eta \left[1 + \gamma (\gamma - 1) M^2 \left\{ \operatorname{ERFC} \eta \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ERFC} \eta \right) - \frac{2}{V\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \right\} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

It will be seen later that at the surface of the plate the corrections to u and μ compensate each other, so that to second order the skin friction is unchanged.

7. Second Approximation for Outer Flow Field

Returning to the outer flow field, we seek a second approximation by iteration. Substituting the acoustic solution into the right-hand sides of equations (19) leads to a nonhomogeneous wave equation to be solved for v . As boundary condition near the plate we require that the solution when expressed in terms of boundary layer variables shall for large η agree to second order (order v_0) with the boundary layer solution of equations (16) and (33). This matching can be accomplished, which is some assurance of the correctness of the procedure. This leads to the remarkable result that to second as well as first order the outer flow field is just that produced in an inviscid fluid by a solid piston moving according to the displacement thickness of equation (18). Thus to second order in the outer flow field

$$v = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M^2 \sqrt{\frac{v_0}{t - y/c_0}} - \frac{(\gamma - 1)^2}{2\pi} \cdot \frac{M^4}{c_0} \cdot \frac{v_0}{t - y/c_0} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{y/c_0}{t - y/c_0} \right), \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M U \varrho_0 \sqrt{\frac{v_0}{t - y/c_0}} \\ &- \frac{(\gamma - 1)^2}{2\pi} M^4 \varrho_0 \frac{v_0}{t - y/c_0} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{4} \cdot \frac{t - 2y/c_0}{t - y/c_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

8. Third Approximations for p and u in Boundary Layer

The expression for pressure in the boundary layer given by equation (25) remains valid to third order. The arbitrary function $h(T)$ can now be determined to this order by expressing the outer flow solution of equation (35) in terms of the boundary layer variables and comparing with equation (26). Again the matching is successful, with the result that in the boundary layer to third order

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2\pi}} M U \varrho_0 \sqrt{\frac{\nu_0}{T}} \\ &+ \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\pi}} M^2 \varrho_0 \frac{\nu_0}{T} \left[\eta \left(\frac{1}{3} e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta \right) + \frac{(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{8\sqrt{\pi}} M^2 \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

The pressure increase at the surface of the plate is

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{M^3}{\sqrt{R}} + \frac{\gamma(\gamma + 1)(\gamma - 1)^2}{8\pi} \left(\frac{M^3}{\sqrt{R}} \right)^2, \quad (37)$$

which is to this approximation just the pressure on the surface of a solid piston moving with the displacement thickness.

Now let u'' be a third-order increment in tangential velocity, to be added to the first- and second-order contributions of equations (12) and (31). Substituting the second approximation for u and the third approximation for p into the right-hand side of equation (9b) gives

$$\begin{aligned} u_T'' - v_0 u_{YY}'' &= - \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2\pi} \cdot \frac{M^3}{c_0} \cdot \frac{\nu_0}{T^2} e^{-\eta^2} \left[\frac{1}{3} (1 - 4\eta^2) e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 2\eta^2) \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \eta e^{-2\eta^2} + \frac{\gamma - 1}{4\sqrt{\pi}} M^2 \eta (11\gamma - 1 - 8\gamma\eta^2) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

This is to be solved together with zero initial and boundary conditions. Some computation yields the solution

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2\pi} \cdot \frac{M^3}{c_0} \cdot \frac{\nu_0}{T} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-3\eta^2} - \sqrt{2} (1 - 2\eta^2) e^{-\eta^2} \operatorname{ERF} \sqrt{2} \eta \right. \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{6} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{ERF}^2 \eta - \frac{1}{3} e^{-2\eta^2} \operatorname{ERF} \eta \\ &+ \frac{7}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{ERF} \sqrt{3} \eta - 2\eta e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{s^2} \operatorname{ERF} \sqrt{3} s ds \right) \\ &\left. + \frac{\gamma - 1}{4\sqrt{\pi}} M^2 \left\{ 8\gamma \eta^3 e^{-\eta^2} + \sqrt{\pi} (\gamma + 1) (\operatorname{ERF} \eta - 2\eta e^{-\eta^2} \int_0^\eta e^{s^2} \operatorname{ERF} s ds) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

This vanishes exponentially at the outer edge of the boundary layer, but only as $\eta^3 e^{-\eta^2}$, whereas the first and second approximations vanish as $\eta^{-1} e^{-\eta^2}$ and $\eta e^{-\eta^2}$ respectively. Thus each successive term in the boundary layer solution penetrates farther into the outer flow field, which is apparently the only way in which tangential velocities will arise in this procedure.

9. Third Approximation for Skin Friction

The skin friction coefficient is given by

$$c_f = \frac{(-u_y u)_{y=0}}{\rho_0 U^2 / 2} = 2 \frac{\nu_0}{U^2} \left(\frac{p}{p_0} \right)_{y=0} \left(-\frac{u_Y}{U} \right)_{y=0}. \quad (40)$$

The term $(p/p_0)_{y=0}$ is obtained from equation (37), and the last term can be calculated from equations (12), (31) and (39). The result is

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \left[1 - \frac{\gamma(\gamma-1)}{2\pi} \cdot \frac{M^4}{R} \{1 + \gamma(\gamma-1)M^2\} \right]. \quad (41)$$

The first term is the usual boundary layer result. It is independent of compressibility because of the assumption that viscosity is proportional to temperature. Consequently, the decrease of skin friction with Mach number (represented by the latter terms) is entirely the result of interaction between the boundary layer and outer flow field.

10. Discussion

The above procedure can, in principle, be continued indefinitely. In the next cycle, a shock discontinuity must be inserted between the outer flow field and the undisturbed fluid beyond, and account must be taken of disturbances reflected inward from the shock wave. Viscous terms in equations (19) will become effective at this stage, so that the outer flow field is not inviscid beyond the second approximation. At some later stage, the effects of viscosity within the shock wave must be considered.

Clearly the process yields only an asymptotic solution for large time. It is not valid near $t = 0$, because equation (41) would imply that an infinite impulse per unit area is required to set the plate in motion.

The boundary layer approximation is permissible only if the maximum normal velocity is small compared with U . According to equation (17), this requires that

$$\frac{M^2}{\sqrt{R}} \ll 1. \quad (42a)$$

Likewise, acoustic theory is applicable to the outer flow only if the normal velocity at the edge of the boundary layer is small compared with the speed of sound, which requires that

$$\frac{M^3}{\sqrt{R}} \ll 1. \quad (42b)$$

Hence the present solution is a perturbation scheme for small M^2/\sqrt{R} or M^3/\sqrt{R} , whichever is the larger. The preceding results suggest that the solution can be expanded in powers of these two parameters.

REFERENCES

- [1] LAGERSTROM, P. A., COLE, J. D., and TRILLING, L.: *Problems in the Theory of Viscous Compressible Fluids*, GALCIT Report, Calif. Inst. Technol., 1949.
- [2] HOWARTH, L., *Some Aspects of Rayleigh's Problem for a Compressible Fluid*, Quart. J. Mech. appl. Math. 4, Part 2, 157-169 (1951).
- [3] ILLINGWORTH, C. R., *Unsteady Laminar Flow of Gas Near an Infinite Flat Plate*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 46, Part 4, 603-613 (1950).
- [4] STEWARTSON, K., *On the Impulsive Motion of a Flat Plate in a Viscous Fluid*, Quart. J. Mech. appl. Math. 4, Part 2, 182-198 (1951).
- [5] CROCCO, L., *Lo strato limite laminare nei gas*, Monogr. sci. Aeronaut. No. 3 (1946).

Zusammenfassung

Eine unendlich ausgedehnte Platte werde zur Zeit $t = 0$ in ihrer eigenen Ebene mit konstanter Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt. Das betreffende Strömungsfeld einer zähen, kompressiblen Flüssigkeit wird untersucht. Die Lösung geht von der Grenzschichtnäherung aus und benutzt ein Verfahren sukzessiver Annäherungen, um den Effekt der Druckwelle, die wegen der Kompressibilität entsteht, darzustellen. In zweiter Näherung ergibt sich eine verbesserte Grenzschichtlösung und eine akustische Lösung außerhalb der Grenzschicht. Die in der erstgenannten Lösung auftretende unbestimmte Funktion lässt sich aus der Forderung berechnen, dass beide Lösungen am Rande der Grenzschicht übereinstimmen sollen. Aus der Wechselwirkung der äusseren Strömung mit der Grenzschicht ergibt sich eine Verminderung der Schubspannung an der Platte. Das benutzte Verfahren ist nur für grosse Werte eines dimensionslosen Zeitparameters gültig.

(Received: April 10, 1952.)

La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable

Par HENRY FAVRE¹⁾ et BERNHARD GILG, Zurich

Différents auteurs, notamment R. GRAN OLSSON, ont étudié la *flexion des plaques rectangulaires d'épaisseur variable*²⁾. Le cas où cette variation est linéaire n'avait cependant pas encore été traité jusqu'ici. Or une telle variation peut être facilement réalisée, surtout dans le béton armé, en choisissant pour les faces de la plaque deux plans formant un petit angle. Nous avons donc estimé utile d'étudier ce cas.

Après avoir établi l'équation différentielle régissant la flexion (§ 1), nous indiquerons deux méthodes pour intégrer cette équation lorsque la plaque est appuyée le long du contour (§ 2). Nous ferons ensuite une application de ces méthodes, en supposant que la surcharge soit une pression hydrostatique (§ 3). Dans un dernier paragraphe (4), nous donnerons sous forme de diagrammes les résultats d'un calcul numérique.

§ 1. Equation différentielle d'une plaque rectangulaire d'épaisseur linéairement variable

Soient a et b les côtés. Choisissons les axes x, y, z indiqués dans la figure 1 et posons, pour l'épaisseur h en un point quelconque:

$$h = \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \right] h_0, \quad (1)$$

d'où

$$(h)_{y=0} = (1 - \lambda) h_0, \quad (h)_{y=b} = (1 + \lambda) h_0,$$

h_0 désignant la valeur de l'épaisseur de long de la droite $y = b/2$. Le nombre λ est la variation, divisée par h_0 , que subit h depuis cette droite jusqu'à l'un ou

1) Chaire de Mécanique, Ecole polytechnique fédérale.

2) Citons entre autres: R. GRAN OLSSON, *Die Biegung der rechteckigen Platte veränderlicher Dicke, Biegungssteifigkeit*, Ing.-Arch. 5, 363 (1934); *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Dicke, Bauingenieur* 21, 230 (1940); *Biegung der Rechteckplatte von exponentiell veränderlicher Dicke, Bauingenieur* 22, 10 (1941). — E. REISSNER, *Remark on the Theory of Bending of Plates of Variable Thickness*, J. Math. Phys. 14, 43 (1937).

l'autre des côtés qui lui sont parallèles. Nous supposons donc que h varie uniquement dans la direction de l'axe y .

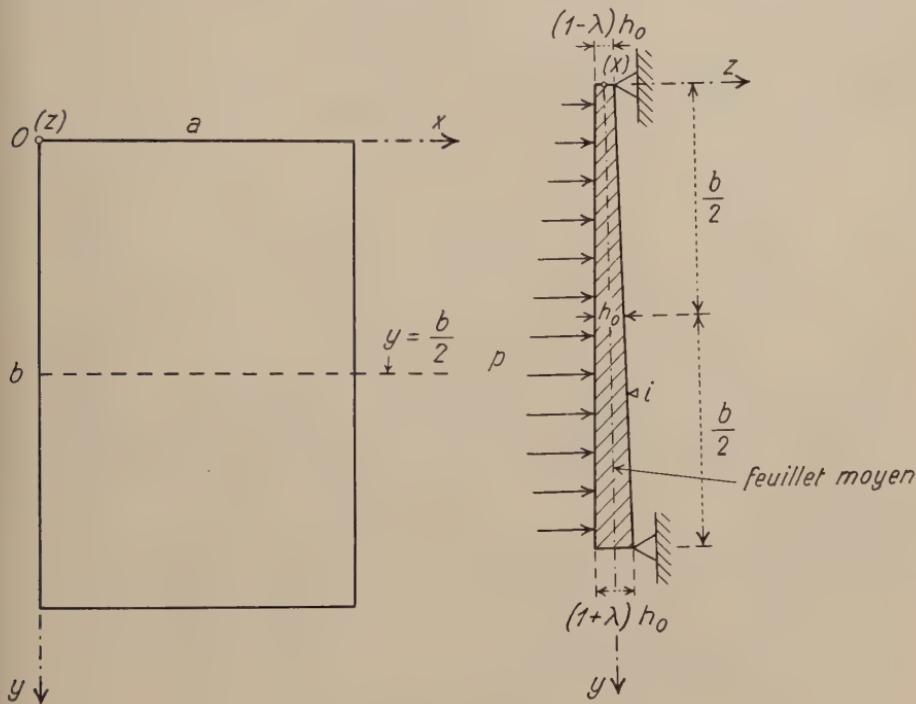


Fig. 1

L'équation régissant la flexion d'une plaque où l'épaisseur varie selon une loi quelconque est, en coordonnées cartésiennes rectangulaires¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta\zeta + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta\zeta + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta\zeta + \Delta D \Delta\zeta \\ - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) = p, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \quad (3)$$

ζ étant le déplacement d'un point du feuillet moyen, Δ , l'opérateur de LAPLACE $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, E , le module d'élasticité, ν , le nombre de POISSON, et $p(x, y)$, la surcharge par unité de surface.

¹⁾ Voir S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill Book Company, New-York et Londres, 1940), p. 195.

Dans le cas étudié, l'équation (2) devient, compte tenu des relations (1), (3) et en posant pour abréger

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{E h_0^3}{12(1-v^2)} : \\ A\Delta\zeta &= \frac{p}{D_0} - 3\lambda \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} A\zeta + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) A\Delta\zeta \right] \\ &\quad - 3\lambda^2 \left[\frac{8}{b^2} \left\{ A\zeta - (1-v) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} A\zeta \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 A\Delta\zeta \right] - \lambda^3 \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \left[\frac{24}{b^2} \left\{ A\zeta - (1-v) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} A\zeta + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 A\Delta\zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Cette équation différentielle n'est évidemment applicable que si l'épaisseur h est partout petite par rapport aux autres dimensions et si le déplacement ζ d'un point quelconque du feuillet moyen est lui-même petit par rapport à h , ce que nous supposerons essentiellement dans la suite. Nous admettons également qu'aucune force n'agisse dans le plan de ce feillet.

Les expressions des moments de flexion M_x , M_y et de torsion M_{xy} , par unité de longueur, sont les mêmes que lorsque l'épaisseur est constante :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -(1-v) D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Il en est de même de celles des tensions σ_x , σ_y , τ_{xy} en fonction des moments :

$$\sigma_x = \frac{M_x}{h^3/12} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{h^3/12} z, \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{h^3/12} z, \quad (6)$$

z désignant la distance d'un point de la plaque au feillet moyen. En particulier, les valeurs de ces tensions aux points $z = h/2$ de la face opposée i à celle où agit la surcharge p sont données par les formules :

$$(\sigma_x)_i = \frac{6 M_x}{h^2}, \quad (\sigma_y)_i = \frac{6 M_y}{h^2}, \quad (\tau_{xy})_i = \frac{6 M_{xy}}{h^2}. \quad (7)$$

§ 2. Méthodes d'intégration, dans le cas où la plaque est appuyée le long du contour

Le déplacement ζ dépend non seulement de x , y , mais aussi de λ . Développons ζ en une série illimitée, procédant selon les puissances croissantes de cette

dernière variable:

$$\zeta(x, y, \lambda) = \zeta_0(x, y) + \zeta_1(x, y) \lambda + \zeta_2(x, y) \lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \lambda^i . \quad (8)$$

Pour déterminer les fonctions $\zeta_i(x, y)$, introduisons l'expression (8) dans les deux membres de l'équation (4), puis identifions les coefficients des mêmes puissances de λ . Nous obtenons le système d'équations différentielles simultanées:

$$\begin{aligned} \lambda^0 | \Delta \Delta \zeta_0 &= \frac{p}{D_0}, \\ \lambda^1 | \Delta \Delta \zeta_1 &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_0 \right], \\ \lambda^2 | \Delta \Delta \zeta_2 &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_1 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_1 \right] \\ &\quad - 3 \left[\frac{8}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_0 - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right\} + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_0 \right], \\ \dots & \\ \lambda^i | \Delta \Delta \zeta_i &= -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{i-1} + \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta \zeta_{i-1} \right] \\ &\quad - 3 \left[\frac{8}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_{i-2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta_{i-2}}{\partial x^2} \right\} + \frac{8}{b} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{i-2} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_{i-2} \right] \\ &\quad - \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \left[\frac{24}{b^2} \left\{ \Delta \zeta_{i-3} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta_{i-3}}{\partial x^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{b} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_{i-3} + \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta \zeta_{i-3} \right], \\ \dots & \end{aligned} \quad (9)$$

La plaque étant *appuyée le long du contour*, les conditions aux limites sont:

$$\zeta \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \equiv 0 , \quad (10)$$

n désignant la direction de la normale au contour, au point considéré. Pour que ces conditions soient satisfaites quel que soit λ , il est nécessaire, d'après (8), que l'on ait en tout point du contour:

$$\zeta_i \equiv 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial n^2} \equiv 0 . \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (11)$$

Revenons au système (9). La première équation contient seulement la fonction inconnue ζ_0 . Cette équation n'étant autre que celle d'une plaque rectangulaire posée d'épaisseur constante h_0 , nous pouvons l'intégrer par la *méthode de Navier*. Dans ce but, commençons par développer le second membre, qui est une fonction connue de x, y , en une série double de sinus, en posant :

$$\frac{\rho}{D_0} = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (12)$$

où

$$A_{mn} = \frac{4}{a b} \int_0^a \sin \frac{m \pi x}{a} dx \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n \pi y}{b} dy. \quad (13)$$

Posons ensuite :

$$\zeta_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}. \quad (14)$$

En introduisant les séries (12) et (14) dans la première des équations (9), et en identifiant, nous obtenons pour les coefficients :

$$B_{mn} = \frac{A_{mn}}{\pi^4 D_0 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (15)$$

On vérifie facilement que la valeur ainsi obtenue pour ζ_0 satisfait aux conditions aux limites (11).

En introduisant cette valeur dans le membre de droite de la seconde des équations (9), ce membre devient une fonction connue de x, y . On peut alors le développer en une série de sinus et déterminer ζ_1 , comme on l'a fait pour ζ_0 . En introduisant ensuite, dans le membre de droite de la troisième des équations (9), les valeurs obtenues pour ζ_0 et ζ_1 , on est ramené à des opérations analogues aux précédentes, pour le calcul de ζ_2 , et ainsi de suite.

La méthode est *tout à fait générale*. Son application suppose seulement que la fonction $\rho(x, y)$ soit développable en série, ce qui est toujours le cas dans la pratique. Cependant, une difficulté se présente dans les calculs. Si ζ_0 s'exprime à l'aide d'une série double, les fonctions ζ_1, ζ_2, \dots se présenteront en réalité sous la forme de sommes de séries, dont une seule est double, les autres ayant un ordre de multiplicité supérieur à deux. L'exemple traité dans le § 3 le montrera éloquemment.

Les séries multiples étant relativement peu commodes pour les calculs numériques, il sera donc indiqué, toutes les fois qu'on pourra le faire, de chercher à appliquer la *méthode de MAURICE LÉVY*. Celle-ci consistera ici à développer les seconds membres en séries simples et à mettre également les fonctions ζ_i sous

la même forme. Cette seconde méthode ne sera toutefois applicable que si la surcharge p a des valeurs égales en deux points symétriques par rapport à la droite $x = a/2$.

L'exemple traité au paragraphe suivant, où il est possible d'appliquer les deux méthodes, fera bien ressortir leur différence.

§ 3. Cas d'une pression hydrostatique

Supposons que deux côtés soient verticaux et que la plaque limite un bassin entièrement rempli d'un liquide de poids spécifique γ (figure 2). On a, dans ce cas:

$$p = \gamma y . \quad (16)$$

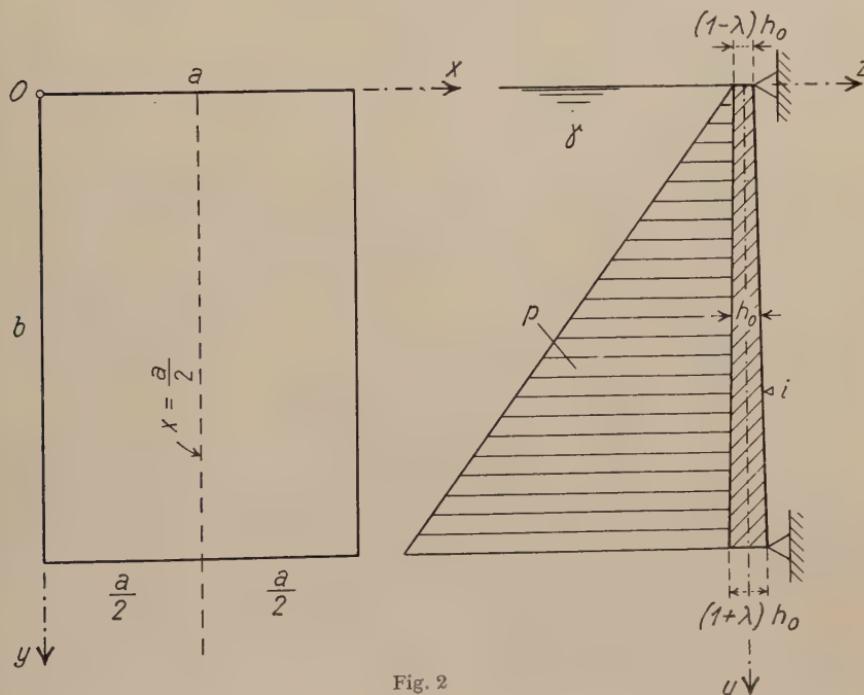


Fig. 2

Première méthode

La première des équations (9) devient:

$$\Delta \Delta \zeta_0 = c y , \quad (17)$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{\gamma}{D_0} = c. \quad (18)$$

En remplaçant, dans la formule (13), $f(x, y)$ par $c y$, et en intégrant, on obtient :

$$A_{mn} = (-1)^{n-1} \frac{8bc}{\pi^2 m n}, \quad \begin{cases} m = 1, 3, 5, \dots, \infty \\ n = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{cases}$$

d'où, en vertu de (14), (15) et en posant

$$\varrho = \frac{a}{b}; \quad (19)$$

$$\zeta_0 = \frac{8a^5c}{\pi^6 \varrho} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{m n (m^2 + n^2 \varrho^2)^2} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}. \quad (20)$$

La seconde des équations (9) s'écrit, compte tenu de (17) :

$$\Delta \Delta \zeta_1 = -3 \left[\frac{4}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_0 + c \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) y \right]. \quad (21)$$

En partant de l'expression (20) de ζ_0 , on obtient sans difficulté :

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_0 = \frac{8a^2c}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m (m^2 + n^2 \varrho^2)} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b}. \quad (22)$$

Développons $\cos(n \pi y/b)$ en série simple de sinus, en appliquant des formules analogues à (12) et (13) :

$$\cos \frac{n \pi y}{b} = \sum_{n'=1}^{\infty} A_{n'} \sin \frac{n' \pi y}{b},$$

où

$$A_{n'} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos \{ \pi (n' + n) \}}{n' + n} + \frac{1 - \cos \{ \pi (n' - n) \}}{n' - n} \right], & (n' \neq n) \\ \frac{1 - \cos \{ \pi (n' + n) \}}{\pi (n' + n)}. & (n' = n) \end{cases}$$

Introduisons ce développement dans (22), ce qui donne pour $\partial \Delta \zeta_0 / \partial y$ la série triple :

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta_0 = \frac{8a^2c}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n'=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m (m^2 + n^2 \varrho^2)} \times \left[\underbrace{\frac{1 - \cos \{ \pi (n' + n) \}}{n' + n} + \frac{1 - \cos \{ \pi (n' - n) \}}{n' - n}}_{= 0, \text{ si } n' = n} \right] \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n' \pi y}{b}. \quad (23)$$

En développant $(2y/b - 1)y$ en série double, on obtient:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) y &= \frac{16b}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \\ &\times \left[\frac{(-1)^n}{2} - \cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi^2} \{1 - \cos(n\pi)\} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Le membre de droite de l'équation (21) devient ainsi, en tenant compte de (23) et (24), la somme d'une série triple et d'une série double. Posons en conséquence:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n'=1,2,\dots}^{\infty} C_{mnn'} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} \\ &+ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} D_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Substituons les expressions (23), (24) et (25) dans l'équation (21), puis identifions. Nous obtenons directement les valeurs des coefficients $C_{mnn'}$ et D_{mn} qui, introduites dans (25), donnent finalement, après quelques transformations:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{24a^5c}{\pi^6\varrho} \left\{ \frac{8\varrho^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n'=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m(m^2+n^2\varrho^2)(m^2+n'^2\varrho^2)^2} \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{n'+n} - \frac{1}{n'-n} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} \right. \\ &= 0, \text{ p. val. paires des dénom.} \\ &+ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n + \frac{4[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}}{m n (m^2+n^2\varrho^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Cette fonction satisfait aux conditions aux limites (11).

Nous avons également calculé ζ_2 , qui est la somme d'une série quadruple, d'une série triple et d'une série double. Il n'y aurait aucune difficulté à déterminer ζ_3 et même ζ_4 . Ces calculs seraient toutefois moins utiles, car, dans la pratique, l'exactitude obtenue en limitant le développement (8) aux trois premiers termes suffira en général.

Deuxième méthode

Posons:

$$\zeta_0 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{0n} \sin(\alpha_n x), \quad (27)$$

où

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (28)$$

Y_{0n} désignant une fonction de la variable y . La série (27) satisfait aux conditions (11) le long des côtés $x = 0$ et $x = a$. Introduisons cette série dans la première des équations (9), en multipliant en outre le second membre par

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\alpha_n x); \quad (29)$$

nous obtenons :

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (Y_{0n}^{IV} - 2\alpha_n^2 Y_{0n}'' + \alpha_n^4 Y_{0n}) \sin(\alpha_n x) = \frac{4c}{\pi} y \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\alpha_n x),$$

où Y_{0n}'' et Y_{0n}^{IV} désignent la dérivée seconde et la dérivée quatrième de Y_{0n} par rapport à y .

En identifiant, dans les deux membres, les coefficients de $\sin(\alpha_n x)$, on est conduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$Y_{0n}^{IV} - 2\alpha_n^2 Y_{0n}'' + \alpha_n^4 Y_{0n} = \frac{4c}{a\alpha_n} y.$$

La solution générale de cette équation est :

$$\left. \begin{aligned} Y_{0n} &= A_{0n} \cosh(\alpha_n y) + B_{0n} \sinh(\alpha_n y) + C_{0n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) \\ &\quad + D_{0n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + \frac{4c}{a\alpha_n^5}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

où A_{0n}, \dots, D_{0n} désignent des constantes.

Les conditions aux limites (11) exigent que

$$Y_{0n} = 0 \quad \text{et} \quad Y_{0n}'' = 0, \quad (31)$$

pour $y = 0$ et $y = b$.

Ces conditions, exprimées à l'aide de la solution (30), conduisent à quatre équations linéaires qui, résolues par rapport aux constantes A_{0n}, \dots, D_{0n} , donnent les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} A_{0n} &= 0, & B_{0n} &= -\frac{4b}{a\alpha_n^3 \sinh(\alpha_n b)} \left(1 + \frac{b\alpha_n}{2 \operatorname{tgh}(\alpha_n b)} \right), \\ C_{0n} &= \frac{2b}{a\alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)}, & D_{0n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

En introduisant ces valeurs dans le second membre de (30), puis en substituant dans (27), on obtient finalement :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{4b}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^5} \left[\frac{y}{b} - \frac{\sinh(\alpha_n y)}{\sinh(\alpha_n b)} \left(1 + \frac{b\alpha_n}{2 \operatorname{tgh}(\alpha_n b)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_n y \cosh(\alpha_n y)}{2 \sinh(\alpha_n b)} \right] \sin(\alpha_n x). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Posons ensuite :

$$\zeta_1 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{1n} \sin (\alpha_n x), \quad (34)$$

où

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (28)$$

Y_{1n} ne dépendant que de y . La série (34) satisfait aux conditions (11) le long des côtés $x = 0$ et $x = a$.

En introduisant les séries (27) et (34) dans la seconde des équations (9), celle-ci devient, compte tenu des relations (17) et (29) :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (Y_{1n}^{IV} - 2\alpha_n^2 Y_{1n}'' + \alpha_n^4 Y_{1n}) \sin (\alpha_n x) \\ = & -3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{4\alpha_n^8}{b} \left[2C_{0n} \cosh (\alpha_n y) - \frac{4c}{a\alpha_n^6} \right] + \frac{4c}{\pi n} \left(\frac{2y^2}{b} - y \right) \right\} \sin (\alpha_n x), \end{aligned}$$

où C_{0n} est la constante donnée par la troisième des formules (32).

En identifiant, on obtient pour Y_{1n} l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} & Y_{1n}^{IV} - 2\alpha_n^2 Y_{1n}'' + \alpha_n^4 Y_{1n} \\ = & -3 \left\{ \frac{4\alpha_n^8}{b} \left[2C_{0n} \cosh (\alpha_n y) - \frac{4c}{a\alpha_n^6} \right] + \frac{4c}{\pi n} \left(\frac{2y^2}{b} - y \right) \right\}, \end{aligned}$$

donc la solution générale est :

$$\left. \begin{aligned} & Y_{1n} = A_{1n} \cosh (\alpha_n y) + B_{1n} \sinh (\alpha_n y) + C_{1n} \alpha_n y \cosh (\alpha_n y) \\ & + D_{1n} \alpha_n y \sinh (\alpha_n y) + G_1 + G_2 y^2 \cosh (\alpha_n y) + G_3 y + G_4 y^2, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

où

$$G_1 = -\frac{48c}{ab\alpha_n^7}, \quad G_2 = -\frac{6c}{a\alpha_n^4 \sinh(\alpha_n b)}, \quad G_3 = \frac{12c}{a\alpha_n^5}, \quad G_4 = -\frac{24c}{ab\alpha_n^5}, \quad (36)$$

A_{1n}, \dots, D_{1n} étant des constantes.

Les conditions aux limites exigent que

$$Y_{1n} = 0 \quad \text{et} \quad Y_{1n}'' = 0 \quad (37)$$

pour $y = 0$ et $y = b$. On en déduit :

$$\left. \begin{aligned} & A_{1n} = \frac{48c}{ab\alpha_n^7}, \quad B_{1n} = \frac{6c}{a\alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)} \left\{ b - \frac{8[\cosh(\alpha_n b) - 1]}{b\alpha_n^2} \right\}, \\ & C_{1n} = \frac{6b c}{a\alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)}, \quad D_{1n} = \frac{6c}{a\alpha_n^6 \sinh(\alpha_n b)}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Les fonctions Y_{1n} sont donc complètement déterminées, et conséquemment ζ_1 .

Posons encore

$$\zeta_2 = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} Y_{2n} \sin(\alpha_n x), \quad (39)$$

où

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (28)$$

Y_{2n} ne dépendant que de y .

En procédant comme nous l'avons fait pour Y_{0n} et Y_{1n} , on obtient pour les fonctions Y_{2n} :

$$\left. \begin{aligned} Y_{2n} &= A_{2n} \cosh(\alpha_n y) + B_{2n} \sinh(\alpha_n y) + C_{2n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) \\ &+ D_{2n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + H_1 + H_2 y + H_3 y^2 + H_4 y^3 \\ &+ H_5 y^2 \cosh(\alpha_n y) + H_6 y^2 \sinh(\alpha_n y) + H_7 y^3 \cosh(\alpha_n y), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

où

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -\frac{192c}{ab\alpha_n^7}, \quad H_2 = \frac{24c}{a\alpha_n^5} \left(1 + \frac{4(5-v)}{b^2\alpha_n^2}\right), \\ H_3 &= -\frac{96c}{ab\alpha_n^5}, \quad H_4 = \frac{96c}{ab^2\alpha_n^5}, \quad H_5 = -\frac{24c}{a\alpha_n^4 \sinh(\alpha_n b)}, \\ H_6 &= \frac{6c}{a\alpha_n^4 \sinh(\alpha_n b)} \left(-\frac{1+3v}{b\alpha_n} + \frac{1-v}{\tgh(\alpha_n b)}\right), \quad H_7 = \frac{2(7+v)c}{ab\alpha_n^4 \sinh(\alpha_n b)}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{2n} &= \frac{192c}{ab\alpha_n^7}, \quad D_{2n} = \frac{24c}{a\alpha_n^6 \sinh(\alpha_n b)}, \\ B_{2n} &= -\frac{2bc}{a\alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)} \left[3(7-3v) + \frac{48(3+v)}{b^2\alpha_n^2} + \frac{(7-5v)b\alpha_n}{\tgh(\alpha_n b)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{96 \cosh(\alpha_n b)}{b^2\alpha_n^2} - \frac{3(7-11v)}{b\alpha_n \tgh(\alpha_n b)} - \frac{18(1-v)}{\tgh^2(\alpha_n b)} - \frac{6(1-v)b\alpha_n}{\tgh^3(\alpha_n b)} \right], \\ C_{2n} &= -\frac{6bc}{a\alpha_n^5 \sinh(\alpha_n b)} \left[\frac{7-11v}{b^2\alpha_n^2} + v - 3 + \frac{6(1-v)}{b\alpha_n \tgh(\alpha_n b)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1-v)}{\tgh^2(\alpha_n b)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ζ_2 est ainsi connu. Pour la raison invoquée à propos de la première méthode, nous n'avons pas calculé d'autres fonctions ζ_i .

En introduisant les valeurs (20), (26), ... ou (33), (34), (39), ... de ζ_0 , ζ_1 , ... dans la formule (8), on obtient le déplacement ζ en fonction de x , y . Les formules (5) permettent ensuite de calculer les moments de flexion et de torsion

M_x , M_y et M_{xy} , d'où l'on déduit les tensions à l'aide des relations (6) et (7). Nous ne donnerons pas ici les valeurs explicites de ces grandeurs, pour ne pas alourdir notre exposé. On pourrait d'ailleurs calculer également les réactions réparties le long des côtés, ainsi que les réactions concentrées agissant aux quatre sommets du rectangle.

Remarque. Nous avons supposé que la surface libre du liquide était au même niveau que le côté supérieur de la plaque (figure 2). Les deux méthodes que nous avons indiquées permettent cependant de résoudre sans difficulté le cas où la surface libre est située *au-dessous* de ce côté, et celui où elle est située *au-dessus*.

Ce dernier cas est évidemment le plus simple, car il suffit d'ajouter, à la valeur de ζ que nous venons de calculer, celle correspondant à une pression constante p_0 , agissant sur toute la surface de la plaque. On trouve par exemple, en utilisant la seconde méthode et en posant

$$\frac{p_0}{D_0} = c_0 : \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_{0n} \cosh(\alpha_n y) + B_{0n} \sinh(\alpha_n y) + C_{0n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) \right. \\ &\quad \left. + D_{0n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + \frac{4 c_0}{\alpha_n^5 a} \right] \sin(\alpha_n x), \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

où

$$\left. \begin{aligned} A_{0n} &= -\frac{4 c_0}{\alpha_n^5 a}, \quad B_{0n} = \frac{-1}{\sinh(\alpha_n b)} \cdot \frac{2 c_0}{\alpha_n^4 a} [1 - \cosh(\alpha_n b)] \\ &\times \left[\frac{2}{\alpha_n} - \frac{b}{\sinh(\alpha_n b)} \right], \quad C_{0n} = \frac{2 c_0}{\alpha_n^5 a} \cdot \frac{1 - \cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)}, \quad D_{0n} = \frac{2 c_0}{\alpha_n^5 a}; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_{1n} \cosh(\alpha_n y) + B_{1n} \sinh(\alpha_n y) + C_{1n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) \right. \\ &\quad \left. + D_{1n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + G_1 + G_2 y + G_3 y^2 \cosh(\alpha_n y) \right. \\ &\quad \left. + G_4 y^2 \sinh(\alpha_n y) \right] \sin(\alpha_n x), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

où

$$\left. \begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{12 c_0}{\alpha_n^5 a}, \quad B_{1n} = \frac{6 c_0}{\alpha_n^5 a} \cdot \frac{1 + 2 \cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)}, \\ C_{1n} &= \frac{6 c_0}{\alpha_n^5 a \sinh(\alpha_n b)} \left[1 - \cosh(\alpha_n b) + \frac{\sinh(\alpha_n b)}{\alpha_n b} \right], \\ D_{1n} &= \frac{6 c_0}{\alpha_n^5 a} \left[1 + \frac{1 - \cosh(\alpha_n b)}{\alpha_n b \sinh(\alpha_n b)} \right], \quad G_1 = \frac{12 c_0}{\alpha_n^5 a}, \quad G_2 = -\frac{24 c_0}{\alpha_n^5 a b}, \\ G_3 &= -\frac{6 c_0}{\alpha_n^4 a b} \cdot \frac{1 - \cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)}, \quad G_4 = -\frac{6 c_0}{\alpha_n^4 a b}; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\zeta_2 = \frac{\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [A_{2n} \cosh(\alpha_n y) + B_{2n} \sinh(\alpha_n y) + C_{2n} \alpha_n y \cosh(\alpha_n y) + D_{2n} \alpha_n y \sinh(\alpha_n y) + H_1 + H_2 y + H_3 y^2 + H_4 y^2 \cosh(\alpha_n y) + H_5 y^2 \sinh(\alpha_n y) + H_6 y^3 \cosh(\alpha_n y) + H_7 y^3 \sinh(\alpha_n y)] \sin(\alpha_n x),}{(48)}$$

où

$$\begin{aligned} A_{2n} &= -\frac{24 c_0}{\alpha_n^5 a} \left[1 + \frac{4(1+\nu)}{\alpha_n^2 b^2} \right], \\ B_{2n} &= -\frac{c_0}{\alpha_n^5 a \sinh(\alpha_n b)} \left\{ \alpha_n b \left[\frac{4\nu - 8 + 2(7-5\nu) \cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{12(1-\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)] \cosh^2(\alpha_n b)}{\sinh^3(\alpha_n b)} \right] + 24[1-\cosh(\alpha_n b)] \right. \\ &\quad \left. + 12(23+5\nu) \left[\frac{1-\cosh(\alpha_n b)}{\sinh(\alpha_n b)} \right]^2 - \frac{36(7+3\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\alpha_n b \sinh(\alpha_n b)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{96(1-\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\alpha_n^2 b^2} \right\}, \\ C_{2n} &= \frac{c_0}{2\alpha_n^5 a \sinh(\alpha_n b)} \left\{ 36 - 12\nu + 24 \cosh(\alpha_n b) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{(1-\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\sinh^2(\alpha_n b)} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{12}{\alpha_n b} \left[4 \sinh(\alpha_n b) - \frac{4(23+5\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\sinh(\alpha_n b)} \right] \\ &\quad \left. + \frac{72}{\alpha_n^2 b^2} (7+3\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)] \right\}, \\ D_{2n} &= \frac{12 c_0}{\alpha_n^5 a} \left[1 + \frac{2[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\alpha_n b \sinh(\alpha_n b)} + \frac{3(7+3\nu)}{\alpha_n^2 b^2} \right], \\ H_1 &= \frac{24 c_0}{\alpha_n^5 a} \left[1 + \frac{4(1+\nu)}{\alpha_n^2 b^2} \right], \quad H_2 = -\frac{96 c_0}{\alpha_n^2 a b}, \\ H_3 &= \frac{96 c_0}{\alpha_n^2 a b^2}, \quad H_4 = -\frac{12 c_0}{\alpha_n^4 a b} \left[\frac{2[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\sinh(\alpha_n b)} + \frac{5(5+\nu)}{\alpha_n b} \right], \\ H_5 &= -\frac{6 c_0}{\alpha_n^4 a b} \left[4 + \frac{(1-\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\sinh^2(\alpha_n b)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{10(5+\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\alpha_n b \sinh(\alpha_n b)} \right], \\ H_6 &= \frac{2 c_0 (7+\nu)[1-\cosh(\alpha_n b)]}{\alpha_n^4 a b^2 \sinh(\alpha_n b)}, \quad H_7 = \frac{2 c_0 (7+\nu)}{\alpha_n^4 a b^2}. \end{aligned} \quad (49)$$

§ 4. Application numérique

Revenons au cas de la figure 2. Nous avons fait les calculs numériques complets, par la seconde méthode, en supposant la plaque carrée ($a = b$) et $\lambda = 0,2^1$). Pour le nombre de Poisson, nous avons pris $\nu = 0,25$.

Les diagrammes de la figure 3 représentent les valeurs obtenues pour les grandeurs ζ , M_x et M_y , le long de l'axe vertical de la plaque ($x = a/2$), pour trois approximations du calcul. Dans la première, on a limité la série (8) à son premier terme, dans la deuxième, à son second terme, etc.

On voit que la convergence est assez rapide et qu'il serait inutile de calculer une quatrième approximation. C'est pourquoi tous les calculs ont été faits en définitive en ne gardant que les trois premiers termes de la série (8).

La figure 4 montre les courbes de niveau des surfaces représentant les fonctions ζ , M_x , M_y et M_{xy} . Il est intéressant de constater que la surface ζ est quasi symétrique par rapport au plan horizontal $y = b/2$, ce qui montre que la plaque étudiée se déforme sensiblement comme si son épaisseur et sa surcharge étaient constantes. Cela signifie que la variation d'épaisseur compense, en quelque sorte, la variation de la pression, quant aux déformations.

Les surfaces M_x , M_y et M_{xy} sont, par contre, loin de présenter ce caractère. Ce fait est d'ailleurs compréhensible, car la partie inférieure de la plaque, étant moins déformable que la partie supérieure, accuse des moments plus grands que dans cette dernière, où les pressions hydrostatiques sont d'ailleurs plus faibles.

Enfin, la figure 5 montre les courbes de niveau des surfaces $(\sigma_x)_i$, $(\sigma_y)_i$ et $(\tau_{xy})_i$. Les deux premières surfaces sont, comme celle de ζ (figure 4), sensiblement symétriques par rapport au plan horizontal $y = b/2$. Cela est dû à un effet de compensation, analogue à celui que nous avons signalé plus haut à propos de ζ . La surface $(\tau_{xy})_i$ n'accuse malheureusement pas ce caractère de symétrie: dans la partie inférieure de la plaque règnent des tensions tangentialles beaucoup plus grandes que dans la partie supérieure²⁾.

Les caractères de symétrie que nous avons pu relever, qui existent malgré l'asymétrie de la surcharge par rapport à l'axe $y = b/2$, montrent éloquemment le rôle joué par la variation linéaire d'épaisseur de la plaque. Ce rôle est favorable, puisqu'il contribue à donner une bonne répartition aux déformations et aux tensions normales dans le domaine considéré.

¹⁾ Il s'agit, par exemple, d'une plaque dont l'épaisseur varie de 8 à 12 cm.

²⁾ Les tensions tangentialles ne sont pas nulles le long du contour. Ce fait entraîne, comme dans le cas où l'épaisseur est constante, l'existence de réactions supplémentaires qu'il serait facile de calculer.

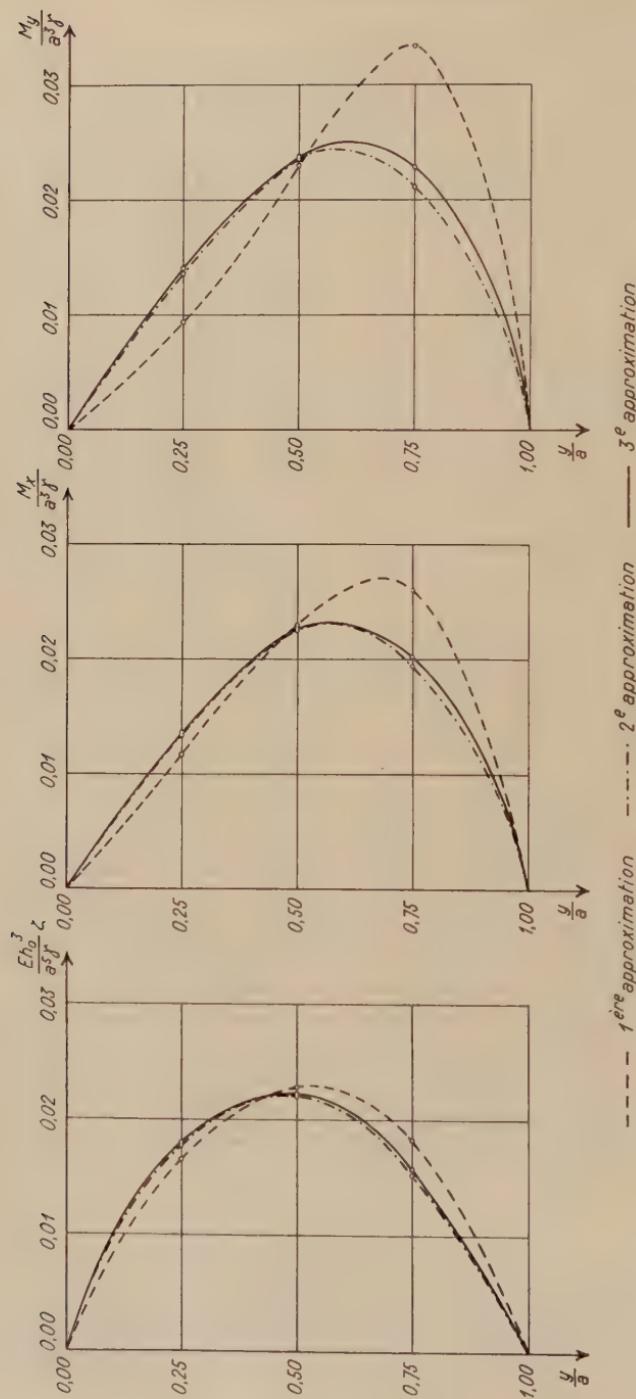


Fig. 3
Plaque de la figure 2. Cas où $a = b$, $\lambda = 0,2$ et $\nu = 0,25$. Diagrammes des grandeurs ζ , M_x et M_y , le long de l'axe vertical de la plaque ($x = a \cdot z$), pour les trois premières approximations.

Fig. 3

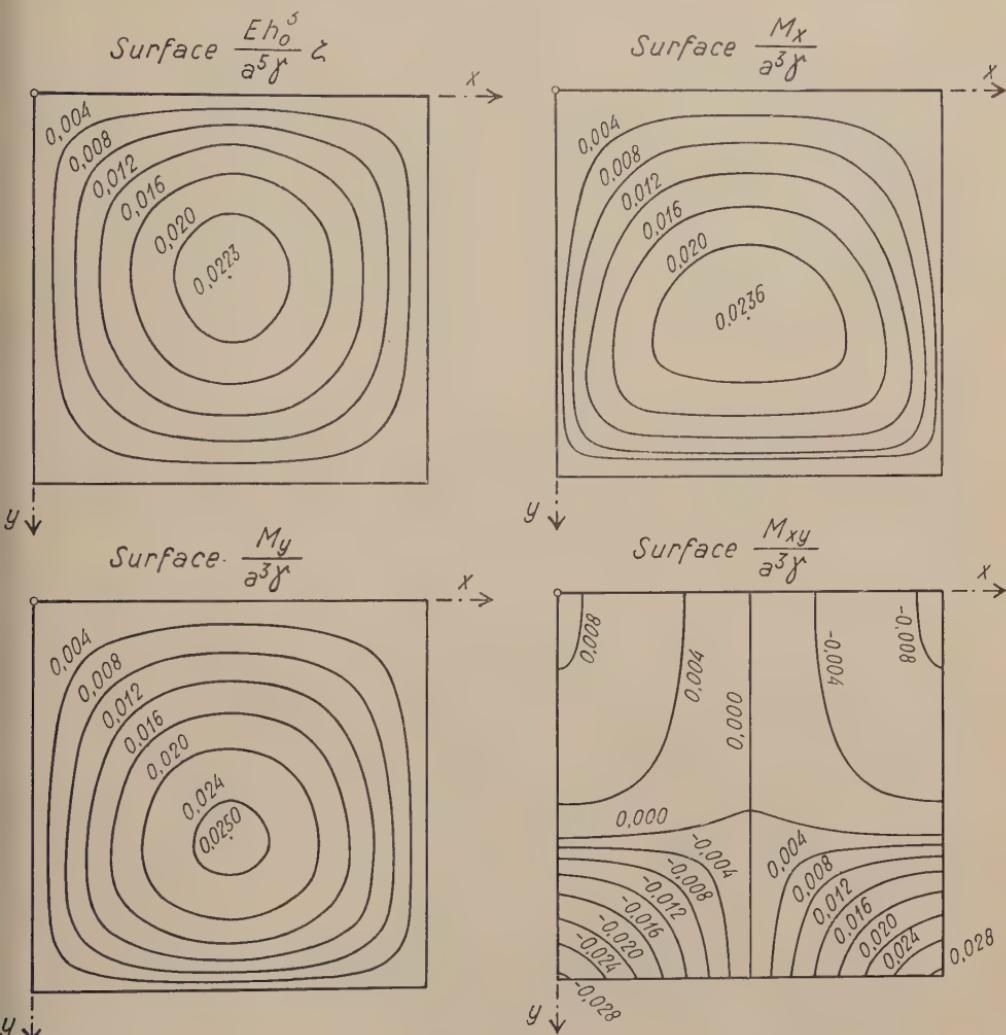


Fig. 4

Plaque de la figure 2. Cas où $a = b$, $\lambda = 0,2$ et $\nu = 0,25$. Courbes de niveau des surfaces ζ , M_x , M_y et M_{xy} .

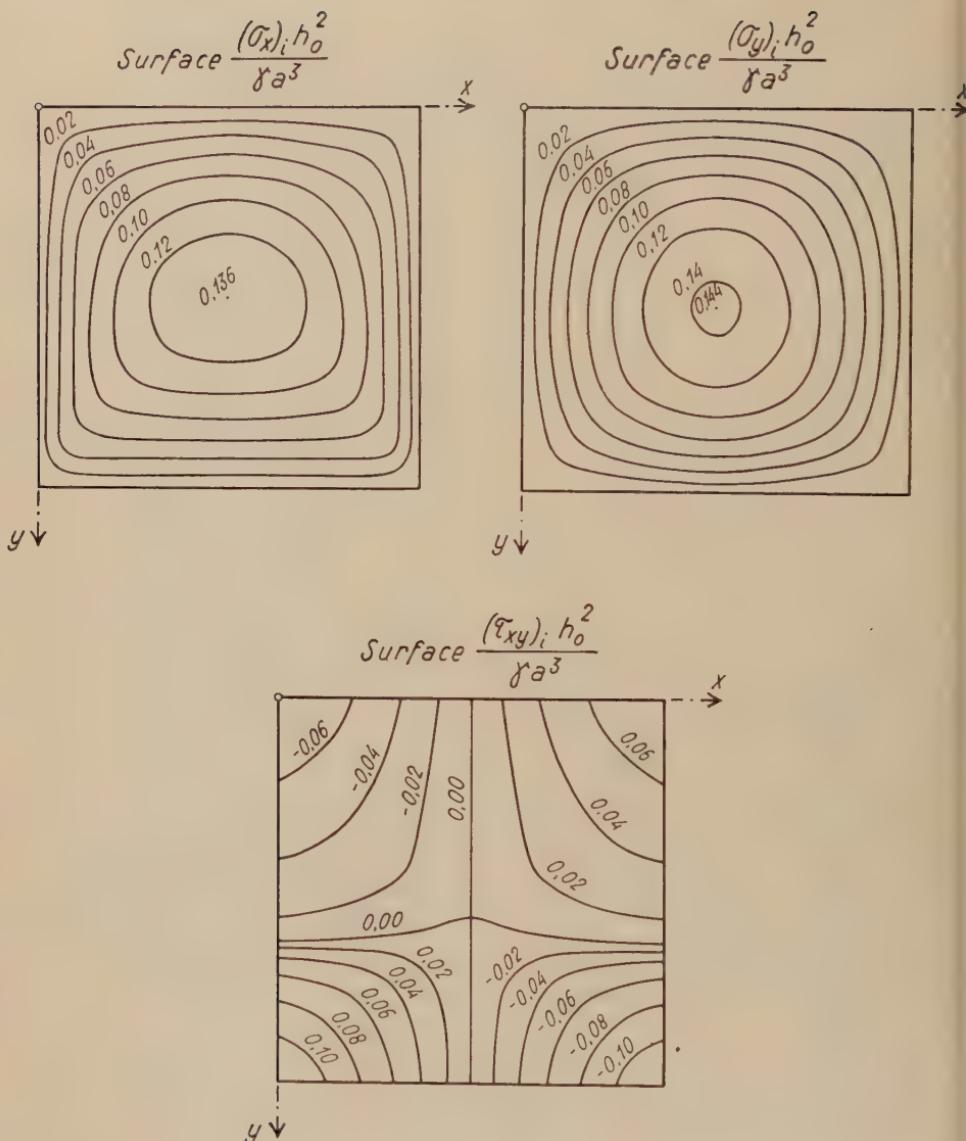


Fig. 5

Plaque de la figure 2. Cas où $a = b$, $\lambda = 0,2$ et $\nu = 0,25$.
Courbes de niveau des surfaces $(\sigma_x)_i$, $(\sigma_y)_i$ et $(\sigma_{xy})_i$.

Summary

This paper deals with bending of simply supported rectangular plates of linearly varying thickness. The solution of the partial differential equation of the middle surface may be reduced to the integration of a system of simpler equations by development in a series. Any of these equations has a form similar to the equation of a rectangular plate of constant thickness. The solution may be found either by the method of multiple trigonometrical series (NAVIER) or, for symmetrically distributed load, by simple series (MAURICE LÉVY).

The case of hydrostatic pressure is discussed in detail. A numerical example, with graphical results, clearly shows the influence of variability of thickness on bending, on twisting and bending moments, and on normal and shearing forces.

(Reçu le 13 juin 1952.)

Die automatische Kursregelung von Flugzeugen

Von RUDOLF GLAUS, Minneapolis, Minn.¹⁾

(Fortsetzung und Schluss)

7. Die automatische Kursregelung eines Flugzeuges in der Längsachse

Bei einem Langstreckenflug wird ein Flugzeug meistens in einer konstanten Höhe geflogen. Dem Piloten stehen Instrumente, wie der Höhenmesser und das Variometer, zur Verfügung, welche ihm Änderungen in der vertikalen Flugrichtung anzeigen. Wenn in konstanter Höhe geflogen wird, dann ist der Anstellwinkel α gleich dem Winkel ϑ . Hierbei ist ϑ definiert als der Winkel zwischen Längs- und Horizontalachse des Flugzeuges, während der Anstellwinkel α als der Winkel zwischen Anströmrichtung und Flugzeuglängsachse bezeichnet wird, wie aus Figur 7 ersichtlich.

Infolge Brennstoffverbrauches ändert sich der Anstellwinkel α bei konstant gehaltener Motorenleistung. Damit das Flugzeug auf gleicher Höhe bleibt, muss ϑ geändert werden. Aufgabe der automatischen Kursregelung ist es jetzt, einen kommandierten Winkel ϑ_e so zu halten, dass sich die Höhe des Flugzeuges nicht ändert. Hierbei kann der Eingang ϑ_e vom Piloten selber oder aber automatisch durch einen Höhenregler verändert werden. Der Ausgangswinkel ϑ_a wird durch einen Vertikalkreisel gemessen, wie in Figur 7 angedeutet. Das Blockdiagramm der ganzen Längssteuerung ist in Figur 8 dargestellt. Die Abweichung ε_1 ist wiederum die Differenz zwischen ϑ_e und ϑ_a . Sie wirkt über einen Regler auf eine Verstärker-Servomotor-Kombination. Der Ausgang des Servomotors ist über Kabel mit dem Höhensteuer verbunden. Ein Höhensteuerausschlag δ_e ergibt durch das Flugzeug eine Änderung von ϑ_a , die, wie

¹⁾ Minneapolis-Honeywell Regulator Company, Aeronautical Division.



Fig. 7

Schematische Darstellung eines Flugzeugs in der Längsachse.

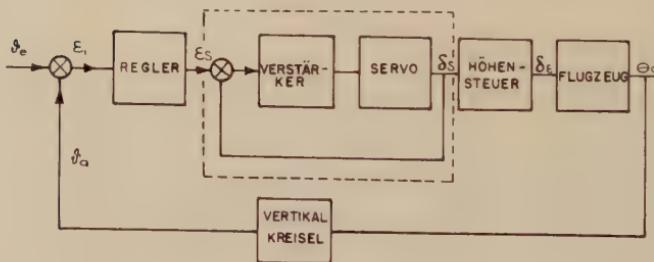


Fig. 8

Blockdiagramm für Flugzeuglängssteuerung.

bereits erwähnt, vom Vertikalkreisel gemessen wird. Damit erhalten wir einen geschlossenen Regelkreis. Alle Komponenten im Blockdiagramm von Figur 8 sollen als gegeben betrachtet werden, mit Ausnahme des Verstärkungsfaktors K_R des Reglers. Dieser soll so eingestellt werden, dass das maximale Amplitudenverhältnis $|\delta_a/\delta_e| (i \omega)$ gleich 1,3 wird. Es ist ebenfalls nach der Eigenfrequenz ω_e des geschlossenen Regelkreises gefragt. Als erstes werden jetzt die Gangkurven der einzelnen Regelemente bestimmt werden.

Regler, Verstärker und Servomotor

In unserm Beispiel sind sowohl Regler wie Verstärker und Servomotor elektrische Komponenten des C-1-Autopiloten, hergestellt durch die Minneapolis-Honeywell Regulator Co. Die Reglergangkurve ist vollständig beschrieben durch einen variablen Verstärkungsfaktor K_R , da die dynamischen Eigenschaften vernach-

lässtigt werden können. Der Verstärkerfrequenzgang ist ebenfalls nur durch eine Konstante bestimmt. Hingegen weist der Servo dynamische Eigenschaften auf, die nicht vernachlässigt werden dürfen. Die Ausgangsseite des Servo treibt über ein Reduktionsgetriebe die Seiltrommel und ein Potentiometer. Am Potentiometer wird eine Spannung proportional der Seiltrommelmehrung abgegriffen und zum Verstärkereingang zurückgeführt. Somit wird jeder Eingangsspannung des Verstärkers ein bestimmter Drehwinkel der Seiltrommel zugeordnet. Der Frequenzgang $\frac{\delta_S}{\epsilon_S}$ der Verstärker-Servomotor-Kombination wurde experimentell bestimmt und ist in Figur 9 dargestellt.

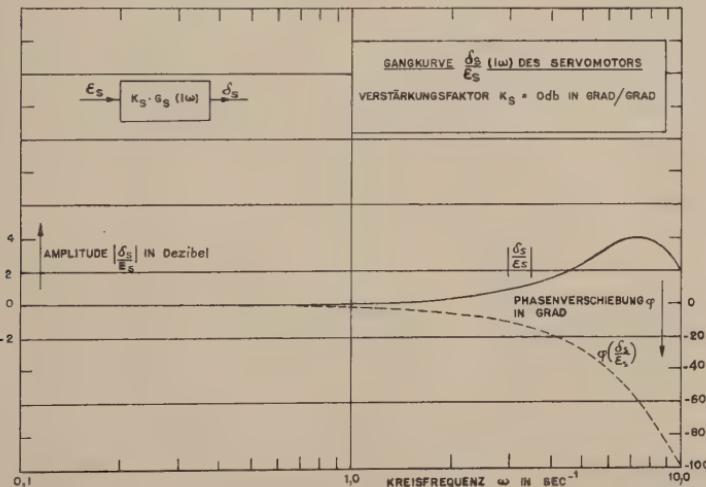


Fig. 9

Das Blockdiagramm in Figur 8 kann jetzt vereinfacht werden, indem $\frac{\delta_S}{\epsilon_S}$ als ein Block, wie die gestrichelte Linie andeutet, gezeichnet wird.

Das Höhensteuer

Das Höhensteuer wird mittels Drahtseilen durch den Servomotor bewegt. Als Flugzeug soll in unserem Beispiel eine DC-3 verwendet werden. Da die Eigenfrequenz von Höhensteuer und Drahtseilen viel höher ist als der Frequenzbereich, in welchem die übrigen Komponenten arbeiten, wird das dynamische Verhalten dieser Teile vernachlässigt. Hingegen ist zu beachten, dass der Höhensteuerausschlag für einen konstanten Drehwinkel der Servoseiltrommel mit der Fluggeschwindigkeit variiert. Der Steuerausschlag ist am grössten am Boden und nimmt mit zunehmender Fluggeschwindigkeit infolge der auf das Höhensteuer einwirkenden Luftkräfte und der Elastizität der Drahtseile ab. Da wir in unserem Fall nur einen Flugzustand betrachten, reduziert sich die

Gangkurve des Höhensteuers zu einem konstanten Verstärkungsfaktor

$$K_E = 0,44 \frac{\text{Höhensteuerausschlag in Grad}}{\text{Servodrehwinkel in Grad}} = -7 \text{ Dezibel}. \quad (27)$$

Das Flugzeug

Die dynamischen Eigenschaften eines Flugzeugs sind abhängig von Fluggeschwindigkeit, Höhe, Gewicht und Schwerpunktslage. Deshalb muss eine optimale Regeleinstellung entsprechend diesen variablen Parametern geändert werden. Wir betrachten aber hier nur den Fall, wo Fluggeschwindigkeit, Höhe, Gewicht und Schwerpunktslage als konstant vorausgesetzt sind. Somit kann das Verhalten des Flugzeugs in seiner Längsachse durch eine Gangkurve beschrieben werden. Der Frequenzgang $K_F G_F$ wurde im Flugzeug direkt experimentell durch sinusförmiges Variieren des Höhensteuers aufgenommen und ist in Figur 10 aufgezeichnet. Er kann ebenfalls aus der Differentialgleichung des

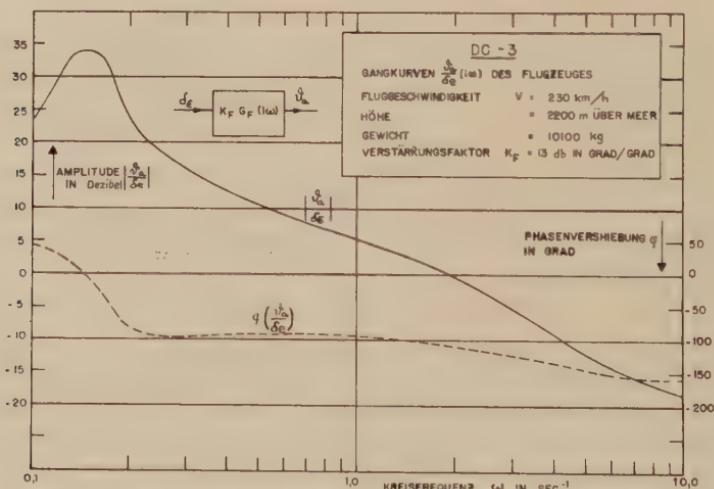


Fig. 10

Flugzeuges abgeleitet werden, falls die aerodynamischen Konstanten für diesen bestimmten Flugzustand bekannt sind [9], [10]¹⁾. Der analytische Ausdruck für die Flugzeuggangkurve $K_F F_{F(p)}$ hat die Form:

$$K_F G_{F(p)} = \frac{\theta_a}{\delta_e} (p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4}. \quad (28)$$

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 382.

Hierbei sind die Werte für die verschiedenen a und b durch die aerodynamischen Konstanten bestimmt. Die Berechnung des Frequenzganges mit Gleichung (28) ist sehr mühsam, da die Ausdrücke für die darin auftretenden Konstanten einen komplizierten Aufbau haben. Andererseits ist eine direkte Bestimmung des Frequenzganges im Flugzeug zeitraubend und kostspielig. Es wird deshalb oft die Antwortkurve des Flugzeuges aufgenommen und daraus der Frequenzgang bestimmt.

Der Vertikalkreisel

Dieser Kreisel errichtet eine vertikale Bezugsachse im Raum und ist als ein Pendel mit einer sehr langen Schwingungsdauer zu betrachten. Die Gangkurve des Vertikalkreisels kann durch eine Konstante K_{VK} beschrieben werden, da das uns interessierende Frequenzspektrum viel kürzere Schwingungsperioden hat als der Kreisel. In unserm Beispiel ist:

$$K_{VK} = 1 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}} = 0 \text{ Dezibel.} \quad (29)$$

Die Gangkurve $K G_{(i\omega)}$ des aufgeschnittenen Regelkreises

Es ist:

$$K G_{(i\omega)} = K_R K_S G_{S(i\omega)} K_E K_F G_{F(i\omega)} K_{VK} \quad (30)$$

und

$$K = K_R + K_S + K_E + K_F + K_{VK} \quad \text{in Dezibel.} \quad (31)$$

Hierbei ist K_R noch unbestimmt, während die übrigen Verstärkungsfaktoren gegeben sind. Es wird:

$$K = K_R + 6 \quad \text{in Dezibel,} \quad (32)$$

$$G_{(i\omega)} = G_{S(i\omega)} G_{F(i\omega)} \quad (33)$$

oder

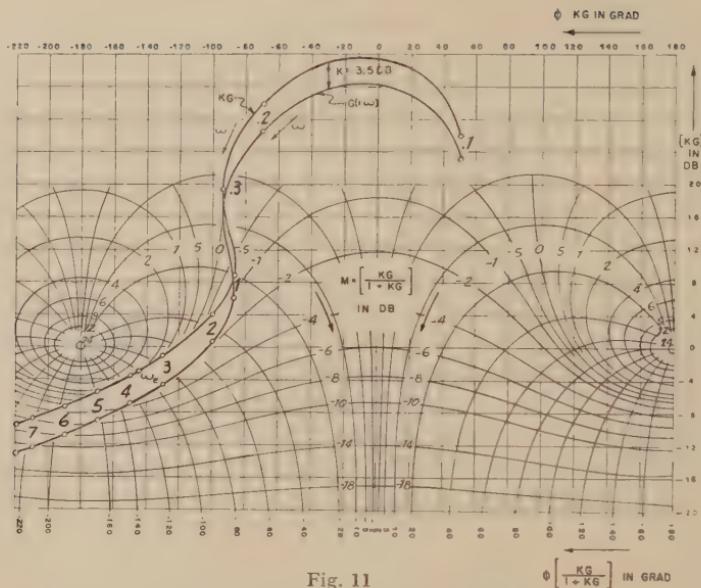
$$|G_{(i\omega)}| = |G_{S(i\omega)}| + |G_{F(i\omega)}| \quad \text{in Dezibel,} \quad (34)$$

$$\varphi_{[G_{(i\omega)}]} = \varphi_{[G_{S(i\omega)}]} + \varphi_{[G_{F(i\omega)}]}. \quad (35)$$

$G_{(i\omega)}$ ist im Nichols-Diagramm, Figur 11, aufgetragen.

Die Kurve $G_{(i\omega)}$ wird jetzt so lange in der Vertikalrichtung verschoben, bis sie Tangente an die M -Kurve 1,3 -- 2 db ist. Der Ordinatenunterschied der beiden Kurven ist gleich dem Verstärkungsfaktor K des aufgeschnittenen Regelkreises und wird aus Figur 11 abgelesen:

$$K_{max} = 3,5 \text{ Dezibel;} \quad (36)$$

Fig. 11
Gangkurven für Flugzeuglängssteuerung.

daraus können wir den grösstmöglichen Verstärkungsfaktor K_R des Reglers mit Gleichung (32) bestimmen:

$$K_R = -2,5 \text{ db} = 0,75 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}}. \quad (37)$$

Die Eigenfrequenz ω_e des geschlossenen Regelkreises wird ebenfalls aus Figur 11 abgelesen:

$$\omega_e = 3,75 \text{ s}^{-1}. \quad (38)$$

In Figur 12 ist die Gangkurve des geschlossenen Regelkreises für das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung über den Logarithmus der Frequenz aufgetragen. Diese Darstellungsart ergibt ein übersichtliches Bild über die Regelgüte des geschlossenen Systems.

Es ist ersichtlich, dass die Regelung über einen Frequenzbereich von 0,1 bis $2,5 \text{ s}^{-1}$ ein Amplitudenverhältnis von ungefähr 0 Dezibel und vernachlässigbarer Phasenverschiebung hat. Über diesen Frequenzbereich vermag der Ausgang dem Eingang sozusagen verzögerungsfrei zu folgen. Es soll jetzt untersucht werden, wie das System in Figur 8 verbessert werden kann. Oder anders ausgedrückt:

Der Verstärkungsfaktor K und die Eigenfrequenz ω_e sollen erhöht werden, und zwar wiederum für ein

$$\frac{\theta_a}{\theta_e} (i \omega)_{max} = 1,3 \quad M_{max}.$$

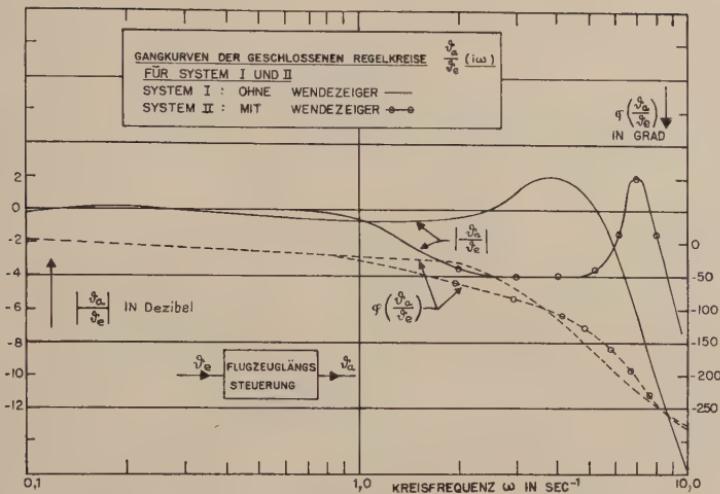


Fig. 12

Die Vergrösserung des Verstärkungsfaktors K in einem Regelkreis hat eine dreifache Wirkung: Erstens wird der Effekt von Störungen auf das statische Verhalten der Regelung verkleinert, zweitens die Geschwindigkeit, mit welcher das System bei einer plötzlichen Eingangsänderung antwortet, erhöht, und drittens die Stabilität des Regelkreises vermindert. In unserm Fall hat K bereits den maximalen Wert erreicht, der mit unserm Stabilitätskriterium toleriert werden kann. Infolgedessen brauchen wir ein zusätzliches Regelement, um die Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises $K G_{(i\omega)}$ so zu formen, dass der Verstärkungsfaktor K erhöht werden kann. Als zusätzliches Regelement verwenden wir einen Wendezieger, der nichts anderes als ein federbelasteter Kreisel ist und die zeitliche Änderung von ϑ_a misst. Dadurch ergibt sich ein Blockdiagramm, wie aus Figur 13 ersichtlich ist.

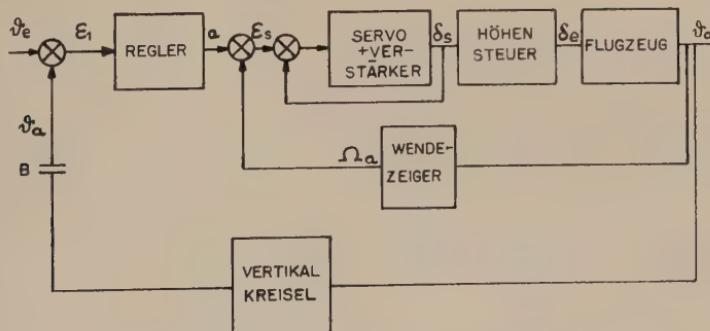


Fig. 13

Blockdiagramm für Flugzeuglängssteuerung mit Wendezieger.

Es ist:

$$\dot{\vartheta}_a = \frac{d\vartheta}{dt} = p \vartheta . \quad (39)$$

Der grundsätzliche Aufbau eines Wendeziegers ist aus Figur 14 ersichtlich.

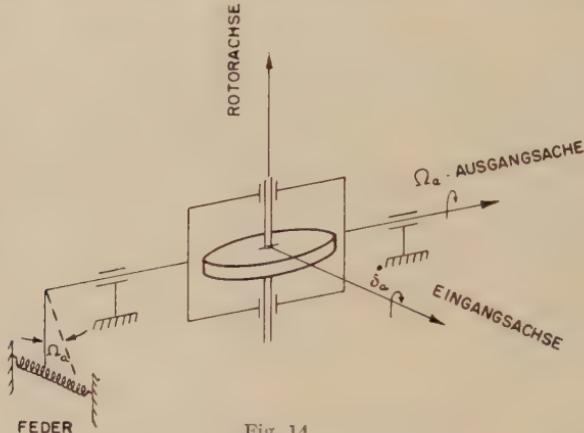


Fig. 14
Schematische Darstellung eines Wendeziegers.

Der ideale Wendezieger vermöchte allen zeitlichen Änderungen von ϑ_a für jede beliebige Frequenz zu folgen. Es würde dann der Ausgang:

$$\Omega_a = K_W p \vartheta_a . \quad (40)$$

Hierbei ist K_W die sogenannte Kreiselkonstante und in unserm Beispiel als 1 angenommen. Bei der praktischen Ausführung eines Wendeziegers können die dynamischen Eigenschaften von Kreiselmasse, Federn und Reibungskräften in der Lagerung des Kardanringes im allgemeinen nicht mehr vernachlässigt werden. Sie werden mit Hilfe eines Systems zweiter Ordnung in die Gangkurve des Wendeziegers einbezogen. Wir erhalten dann:

$$\frac{\Omega_a}{\dot{\vartheta}_a} (i \omega) = K_p \frac{\omega_{em} i u}{-u^2 + 2 \xi i u + 1} . \quad (41)$$

Es bedeuten:

$$u := \frac{\omega}{\omega_{em}}$$

ω = Störfrequenz s^{-1}

ω_{em} = Eigenfrequenz von Wendezieger s^{-1}

ξ = Verhältnis von tatsächlicher Dämpfung zu kritischer Dämpfung des Wendeziegers.

In unserm Beispiel ist

$$\omega_{e_m} = 10 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \xi = 0,2.$$

Die Gangkurve (Ω_a/ϑ_a) ($i \omega$) wird erhalten durch Ersetzen von u durch ω/ω_{e_m} und ist in Figur 15 aufgetragen.

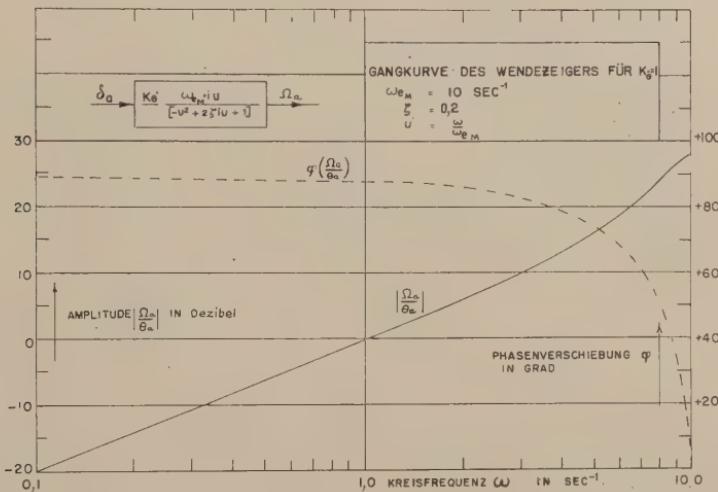


Fig. 15

Wir erhalten jetzt:

$$\varepsilon_1 = \vartheta_e - \vartheta_a, \quad (42)$$

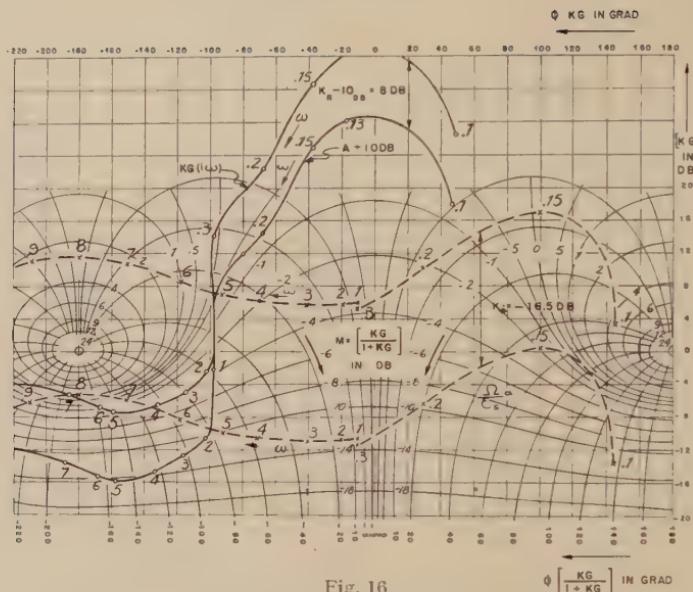
$$\varepsilon_S = a - \Omega_a, \quad (43)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_S - \delta_S. \quad (44)$$

Alle Gangkurven und deren Verstärkungsfaktoren sind gleich wie im vorigen Beispiel, nur dass jetzt die Gangkurve von (Ω_a/ϑ_a) ($i \omega$) zusätzlich dazukommt. Die Bestimmung der Verstärkungsfaktoren K_R und K_e der beiden Regelkreise erfolgt so, dass die Regelung bei B zuerst aufgeschnitten und der innere Regelkreis, durch Bestimmen von K_ϕ , eingestellt wird. Es wird systematisch so vorgegangen:

a) Zeichne die aufgeschnittene Gangkurve (Ω_a/ε_S) ($i \omega$) ins Nichols-Diagramm und stelle den Verstärkungsfaktor K_ϕ so ein, dass $M = 2$ Dezibel ist. Aus Figur 16 erhalten wir:

$$K_\phi = -16,5 \text{ db} = 0,15 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad s}^{-1}}. \quad (45)$$



Gangkurven für Flugzeuglängssteuerung mit Wendezeiger.

b) Berechne (θ_a/a) ($i \omega$). Aus dem Nichols-Diagramm kann sofort Ω_a/a abgelesen werden. Daraus erhalten wir:

$$\frac{\vartheta_a}{a} (i\omega) = \frac{\Omega_a}{a} (i\omega) \cdot \frac{1}{\frac{\Omega_a}{\vartheta_a} (i\omega)} = A . \quad (46)$$

Figur 13 kann jetzt wie in Figur 17 in ein Blockdiagramm vereinfacht werden.

c) Die Gangkurve des Vertikalkreisels ist gleich 1, und die Gangkurve des Reglers besteht ebenfalls nur aus einem Verstärkungsfaktor K_R , der vorerst gleich 1 angenommen wird. Damit erhalten wir durch Eintragen von A ins

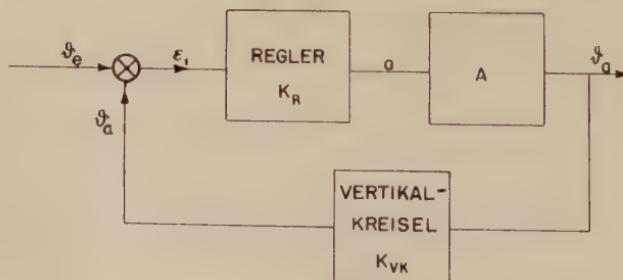


Fig. 17

Vereinfachtes Blockdiagramm der Flugzeuglängssteuerung mit Wendezeiiger

Nichols-Diagramm (Figur 16) und Verschieben dieser Kurve, bis sie $M = 2 \text{ db}$ berührt, direkt K_R als Ordinatenunterschied. Da A Amplituden aufweist, die -20 db überschreiten, ist in Figur 16 als Amplitude ($A + 10 \text{ db}$) aufgetragen.

Wir erhalten

$$K_R = 18 \text{ db} - 7,9 \frac{\text{Grad}}{\text{Grad}} \quad (47)$$

und

$$\omega_e = 7 \text{ s}^{-1}. \quad (48)$$

Tabelle 2 ist eine Zusammenstellung der Verstärkungsfaktoren K und Eigenfrequenzen ω_e der beiden Regelsysteme.

Tabelle 2

	Verstärkungsfaktor des aufgeschnittenen Regelkreises K_{db}	Eigenfrequenz des geschlossenen Regelkreises $\omega_e \text{ s}^{-1}$ K_{ab}
System I (ohne Wendezieger)	3,5	1,5
System II (mit Wendezieger)	24	17

Aus Tabelle 2 ist ersichtlich, dass der Verstärkungsfaktor K in System II ungefähr zehnmal grösser ist als in System I, während die Eigenfrequenz fast verdoppelt wurde.

Die Gangkurve des geschlossenen Regelkreises ($\vartheta_a / \vartheta_e$) ($i \omega$) mit Wendezieger ist ebenfalls in Figur 12 eingezeichnet. Aus diesem Diagramm ist ersichtlich, dass die Amplitude bei $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ von 0 db auf -4 db abzusinken beginnt, um dann auf das Maximum von $+2 \text{ db}$ anzusteigen. Dieser Amplitudenverlauf würde nicht den gewünschten Gütegrad der Regelung ergeben. Der Grund dieser negativen Amplitudenausbuchtung ist darin zu finden, dass die Eigenfrequenz des Wendeziegers zu tief gewählt wurde. Aus Figur 16 ist ersichtlich, dass die Gangkurve bei $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ zu steigen beginnt. In diesem Frequenzbereich macht sich die Resonanz des Wendeziegers bemerkbar. Durch Wählen einer höheren Messwerkeigenfrequenz, zum Beispiel $\omega_{em} = 20 \text{ s}^{-1}$, kann das Ansteigen der Gangkurve herausgezögert werden. Damit kann $G_{(i\omega)}$ noch weiter nach oben verschoben werden, und die Annäherung an die Kurve $M = 0 \text{ db}$ wird wesentlich verbessert. Mit dieser Änderung würde der gewünschte Gütegrad der Regelung erreicht.

8. Schlussfolgerungen

- Die Berechnung einer Regelung und deren optimale Einstellung wird wesentlich erleichtert durch Verwenden der Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises.

- b) Mit Hilfe des Nichols-Diagramms kann unverzüglich die Gangkurve des geschlossenen Regelkreises sowie dessen Stabilität, Eigenfrequenz ω_e und maximaler Verstärkungsfaktor K bei gegebenem M -Kriterium bestimmt werden.
- c) Falls eine Regelung den gestellten Anforderungen nicht genügt, so muss die Gangkurve $K G$ durch Zufügen weiterer Regelemente umgeformt werden. Diese Umformung wird wesentlich erleichtert durch das Nichols-Diagramm, da nur darauf geachtet werden muss, dass die Gangkurve $K G$ über einen möglichst grossen Frequenzbereich der Kurve $M = 0$ db folgt.
- d) Die Praxis hat erwiesen, dass in vielen Fällen mit Hilfe des M -Kriteriums direkt von der Gangkurve $K G$ auf das Verhalten der Antwortkurve geschlossen werden kann. Hiermit wird die Entwerfung und Änderung von Regelsystemen, bei vorgeschrriebener Regelgüte, wesentlich vereinfacht, da nur die Gangkurve des aufgeschnittenen Regelkreises benötigt wird.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] WAGNER, K. W., *Operatorenrechnung* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1940).
- [2] DOETSCH, G., *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Springer, Berlin 1937).
- [3] GARDNER, M. F., und BARNES, J. L., *Transients in Linear Systems* (John Wiley & Sons, New York 1942).
- [4] BROWN, G. S., und CAMPELL, D. P., *Principles of Servomechanisms* (John Wiley & Sons, New York 1948).
- [5] JAMES, H. M., NICHOLS, N. B., und PHILIPS, R. S., *Theorie of Servomechanisms* (McGraw-Hill Book Company, New York 1947).
- [6] BODE, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (D. van Nostrand Co., New York 1945).
- [7] HAENNY, JOST, *Regelungstheorie* (Lehmann, Zürich 1947).
- [8] GREENWOOD, I. A., HOLDAM, I. V., und DUNCAN, MACRAE, *Electronic Instruments* (McGraw-Hill Book Company, New York 1948).
- [9] PERKINS, C. D., *Airplane Performance Stability and Control* (John Wiley & Sons, New York 1949).
- [10] DURAND, W. F., *Aerodynamic Theory*, Bd. 5 (Durand Reprinting Committee, Pasadena 1943).

Summary

This paper describes a method for the analysis and optimum design of servomechanisms. The transferfunctions of the open loop as well as the Nichols' diagram are used for the systematic and rapid solution of control problems. As an example of the application of this method, the calculation of an automatic control for the longitudinal axis of an aircraft is carried out. The simplest case is first considered, using a vertical gyro to control the pitchaxis of the airplane. In order to improve this system, a rategyro is added. This more complex system serves at the same time as a sample for the investigation of a multiloop system.
(Eingegangen: 19. November 1951.)

Kriterium der Gleitbereitschaft metallischer Vielkristalle

Von F. ROHNER, Neuhausen am Rheinfall¹⁾

1. Einleitung

Wenn bei der Gleitung Bindungen zwischen den betroffenen Atomen zu lösen wären, müssten ideale Metallkristalle Elastizitätsgrenzen in der Grössenordnung von 1000 kg/mm^2 aufweisen. Die Elektronentheorie der Metalle hat nun aber gezeigt, dass die metallische Bindung als kollektive Wechselwirkung zwischen dem negativen Elektronengas und den positiven Atomrumpfen zustande kommt, dass also gar keine lokalisierten Bindungen zwischen einzelnen bestimmten Metallatomen existieren. Arbeit gegen die Bindungs Kräfte müsste bei der Gleitung deshalb nur geleistet werden, wenn diese zwangswise mit einer bleibenden oder auch nur vorübergehenden Volumzunahme des gleitenden Metallkristalls, etwa einer Dilatation in der Normalen zur Gleitebene, verknüpft wäre. Das ist aber nicht der Fall; je nach der Lage des Gleitsystems zur Beanspruchungsrichtung kann die Gleitung sogar mit einer vorübergehenden Normalkontraktion verlaufen²⁾. Die Erklärung des Widerstandes der Metallkristalle gegen Gleitung bzw. die Ableitung der Grösse ihrer Elastizitätsgrenze muss deshalb auf anderer Basis gesucht werden.

W. L. BRAGG³⁾ hat 1942 die Ansicht ausgesprochen und begründet, dass ein Kristallit erst dann gleiten werde, wenn er durch den Gleitprozess seine elastische Spannungsenergie verringern könne. Die elastischen Spannungen werden auf den Kristalliten durch seine Nachbarkristallite übertragen; dies gilt sowohl für innere wie für äussere Spannungen. BRAGG fasst diese einem Einzelkristalliten durch seine Nachbarn aufgedrückten Spannungen als Schubspannungen auf und leitet ab, dass Gleitung eintreten könne, sobald in einem Kristalliten die Schubspannung σ den der Gleichung (1) entsprechenden Betrag erreiche:

$$\sigma = G \frac{s}{2L}. \quad (1)$$

Dabei bedeuten G , s und L den Gleitmodul bzw. den Atomabstand bzw. den Durchmesser des Gleitelements in der Gleitrichtung.

ROHNER⁴⁾ führte 1947 aus, dass – da sich der Kristallit bei Zugbeanspruchung im elastischen Bereich als untergeordneter Bestandteil seines Kollektivs,

¹⁾ Forschungsinstitut der Aluminium-Industrie-AG.

²⁾ E. SCHMID und W. BOAS, *Kristallplastizität* (Springer, Berlin 1935), S. 284.

³⁾ W. L. BRAGG, *Nature* 149, 511 (1942).

⁴⁾ F. ROHNER, *J. Inst. Met.* 73, 303 (1947).

des Vielkristalls, betrage – der technische Elastizitätsmodul des Vielkristalls und nicht der Gleitmodul des Kristalliten in die Formel eingehen müsse. Schliesslich sei noch auf die Arbeit von WOOD und RACHINGER verwiesen¹⁾; diese Autoren schliessen sich den Anschauungen von BRAGG an. Bei allen bisherigen Ableitungen wurden Querkontraktionen, die sowohl bei der elastischen Dehnung wie bei der plastischen Gleitung auftreten, vernachlässigt. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, das Kriterium der Gleitung oder, besser ausgedrückt, das Kriterium der Gleitbereitschaft unter Einbeziehung dieser Querkontraktionen zu präzisieren.

2. Ableitung der Ansätze zur Berechnung der Spannungsenergien

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, nehmen wir an, dass wir es mit einem aus einigermassen isometrischen Kristalliten aufgebauten Vielkristall zu tun haben und dass – wie etwa bei Aluminium – keine beträchtliche Anisotropie der elastischen Eigenschaften in den Einzelkristalliten besteht. Zur weiteren Vereinfachung führen wir unsere Überlegungen an einem würfelförmigen Kristalliten durch, dessen Querschnitt durch Figur 1 dargestellt sei. Wir denken uns diesen Kristalliten als Bestandteil seines Kollektivs, des Vielkristalls, einer eindimensionalen Dehnung in dem durch einen Pfeil angedeuteten Sinne unterzogen. Bei einer bestimmten kritischen Dehnung wird eine Gleitung, etwa entlang der eingezeichneten Gleitebene, erfolgen. Hernach würde der Kristallit, falls er nicht zwischen seine Nachbarkristallite eingespannt wäre, die in Figur 2 dargestellte Form aufweisen. Allgemein ausgedrückt: Wenn die Dimensionen des würfelförmigen Kristalliten der Figur 1

$$c = 1, \quad b = 1, \quad a = 1$$

sind, so sind die Dimensionen des Kristalliten nach der Gleitung gemäss Figur 2

$$c = 1 + \frac{s}{L}, \quad b = 1 - \frac{s}{L}, \quad a = 1,$$

wobei s und L Atomabstand bzw. Durchmesser des Kristalliten oder Gleitelement in der Gleitrichtung bedeuten. Wenn die Gleitung bei der kritischen Dehnung ε erfolgt ist, muss der Zustand Figur 2, damit die Passung mit den Nachbarkristalliten (die auf Grund ungünstigerer Orientierung und Grösse erst später gleiten sollen) erhalten bleibt, durch elastische Gegenspannungen auf folgende Dimensionen zurückgeführt werden:

$$c = 1 + \varepsilon, \quad b = 1 - \frac{\varepsilon}{m}, \quad a = 1 - \frac{\varepsilon}{m}.$$

Das sind die Dimensionen, die der Kristallit vor Einsetzen der Gleitung – im elastisch gedehnten Zustand – aufwies. Dabei bedeutet m die Poissonsche Zahl.

¹⁾ W. A. WOOD und W. A. RACHINGER, J. Inst. Met. 75, 571 (1949).

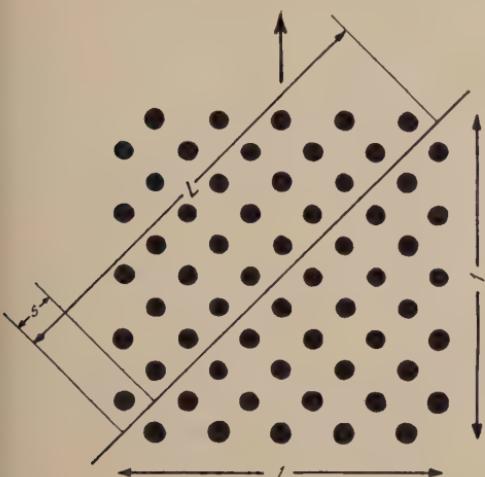


Fig. 1

Querschnitt durch würzelförmiges Gleitelement mit eingezeichnete Gleebene.

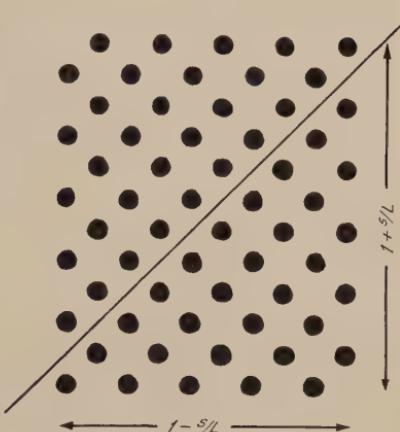


Fig. 2

Gleitelement von Figur 1 nach der Gleitung.

Die Einpassungsverformung wird sich zwar nur zum Teil an dem verformten Kristalliten, zum andern Teil aber an seinen Nachbarkristalliten auswirken. Uns interessieren hier jedoch nur die energetischen Verhältnisse. Für deren Ableitung können wir uns denken, die Einpassungsverformung erfolge voll am verformten Kristalliten. Effektiv werden Gleitung und Einpassung gleichzeitig miteinander erfolgen. Gleitung wird nur möglich sein, wenn die zur Einpassung aufzuwendende Verformungsenergie nicht grösser ist als die zur Erzielung der Dehnung ε in den Kristalliten hineingesteckte Energie. Unsere Aufgabe besteht also in der Ermittlung der Verformungsenergie für die Zurückführung des spannungslos gedachten Kristalliten nach der Gleitung (Tabelle 1, Zustand III) auf die Dimensionen des Kristalliten im elastisch gedehnten Zustand (Tabelle 1, Zustand II). Diese Verformungsenergie der Einpassung ist dann mit der Verformungsenergie der Dehnung von Zustand I auf Zustand II zu vergleichen (Tabelle 1).

Tabelle 1

Dimensionen des Einheitskristalliten im Ausgangszustand I, im elastisch gedehnten Zustand II und, nach der Gleitung um einen Atomabstand, im elastisch vollständig entspannten Zustand III

Zustand	Kristallitendimensionen		
	c	b	a
I	1	1	1
II	$1 + \varepsilon$	$1 - \varepsilon/m$	$1 - \varepsilon/m$
III	$1 + s/L$	$1 - s/L$	1

Die Verformungsenergien berechnen sich nach der Formel (2):

$$E_{(\varepsilon)} = G \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \right]. \quad (2)$$

$E_{(\varepsilon)}$ bedeutet dabei die Verformungsenergie pro Volumeinheit, G den Gleitmodul, der mit dem Elastizitätsmodul E in folgender Beziehung steht:

$$G = E \cdot \frac{m}{2(m-1)}.$$

Für den Spezialfall

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon}{m}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon}{m}$$

(Verformungsenergie beim Übergang von Zustand I auf Zustand II) reduziert sich Formel (2) auf Formel (3):

$$E_{(\varepsilon)} = \frac{m+1}{m} G \varepsilon^2. \quad (3)$$

3. Berechnung und Vergleich der Spannungsenergien

Die Dehnungen für den Übergang von Zustand III auf Zustand II (Tabelle 1) betragen:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{s}{L} = \frac{s}{L} (\varepsilon^* - 1),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{s}{L} - \frac{\varepsilon}{m} = \frac{s}{L} \left(1 - \frac{\varepsilon^*}{m}\right),$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon}{m} = -\frac{s}{L} \cdot \frac{\varepsilon^*}{m},$$

$$\text{wobei } \varepsilon^* = \varepsilon \frac{L}{s}.$$

Wir können bei allen Dehnungen deren gemeinsamen Faktor s/L weglassen:

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon^* - 1, \quad \varepsilon_2^* = 1 - \frac{\varepsilon^*}{m}, \quad \varepsilon_3^* = -\frac{\varepsilon^*}{m};$$

das bedeutet, dass wir als Einheit der Dehnung s/L wählen. Ferner lassen wir aus den Berechnungen der Spannungsenergien den Faktor G weg, was darauf hinausläuft, dass wir die Verformungsenergie statt für das Volum 1 für das Volum $1/G$ erhalten.

Die Poissonschen Zahlen der meisten Metalle liegen zwischen 3 und 4. Tabelle 2 gibt die Lösungen für $m = 3$, Tabelle 3 für $m = 4$. In Figur 3 sind die Ergebnisse dieser Berechnungen zusammenfassend dargestellt. Die Spannungsenergien für die primäre Dehnung sind durch strichpunktuierte Linien dargestellt, die Spannungsenergien der Einpassung durch voll ausgezogene Linien.

Zu jeder Dehnung ε ergibt sich auf der strichpunktiierten Linie die Dehnungsenergie $E_{(\varepsilon, -\varepsilon/m, -\varepsilon/m)}$ und auf der durchgehend ausgezogenen Linie die Einpassungsenergie $E_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}$, die aufgewendet werden müsste, wenn nach Erreichung der Dehnung ε^* Gleitung erfolgen würde. Solange die durchgehend ausgezogene Linie der Einpassungsenergie über der strichpunktiierten Linie der Dehnungsenergie verläuft, ist Gleitung nicht möglich. Es ergibt sich somit, dass für $m = 3$

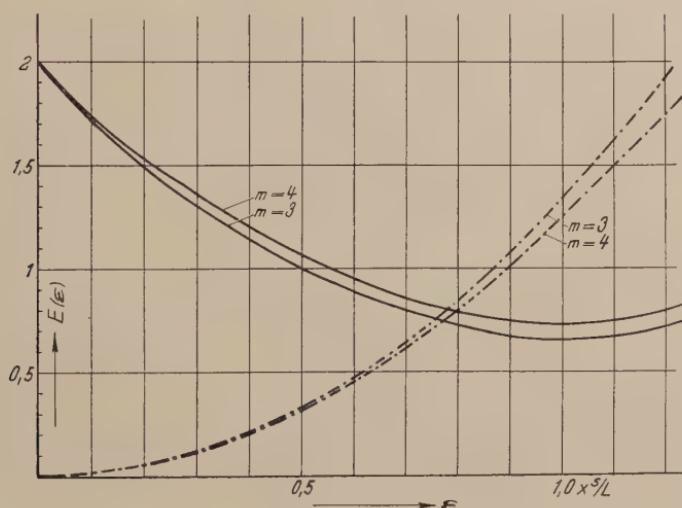


Fig. 3

Verlauf der zur Einpassung eines Kristalliten in seine Umgebung erforderlichen Spannungsenergie E als Funktion der Dehnung ε , bei der Gleitung erfolgt, und im Vergleich zur Verformungsenergie, die zur Dehnung ε gehört; solange die Einpassungsenergie grösser ist als die zu ε gehörende Verformungsenergie, kann Gleitung nicht erfolgen.

— · — zur Dehnung ε gehörende Verformungsenergie,
— — — Einpassungsenergie.

Tabelle 2

Dehnungsenergien $E_{(\varepsilon, -\varepsilon/m, -\varepsilon/m)}$ und Einpassungsenergien $E_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}$ für $m = 3$ und verschiedene kritische Dehnungen ε^* , bei denen Gleitung supponiert wird

ε^*	$E_{(\varepsilon, -\varepsilon/m, -\varepsilon/m)}$	ε_1^*	ε_2^*	ε_3^*	$E_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}$
0	0	— 1	1	0	2,00
0,3	0,12	— 0,7	0,9	— 0,1	1,32
0,6	0,48	— 0,4	0,8	— 0,2	0,88
0,9	1,08	— 0,1	0,7	— 0,3	0,68
1,2	1,92	+ 0,2	0,6	— 0,4	0,72

Tabelle 3

Dehnungsenergien $E_{(\epsilon, \epsilon/m, \epsilon/m)}$ und Einpassungsenergien $E_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)}$ für $m = 4$ und verschiedene kritische Dehnungen ϵ^* , bei denen Gleitung supponiert wird

ϵ^*	$E_{(\epsilon, -\epsilon/m, -\epsilon/m)}$	ϵ_1^*	ϵ_2^*	ϵ_3^*	$E_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)}$
0	0	-1	1	0	2,0
0,3	0,125	-0,7	0,925	-0,075	1,376
0,4	0,20	-0,6	0,9	-0,10	1,20
0,6	0,45	-0,4	0,85	-0,15	0,95
0,8	0,80	-0,2	0,8	-0,2	0,80
1,0	1,25	0,0	0,75	-0,25	0,75
1,2	1,80	+0,2	0,70	-0,30	0,80

Gleitung nicht möglich ist, bevor ϵ den Wert $0,75 s/L$ erreicht hat. Für $m = 4$ liegt der entsprechende Wert bei $\epsilon = 0,8 s/L$. Damit haben wir einen untern Grenzwert für die Elastizitätsgrenze gewonnen. Zur Erzielung der Dehnung $\epsilon = 0,75 s/L$ ist die Spannung $\sigma = 0,75 E s/L$ erforderlich. Da Gleitung bei kleineren Spannungen nicht eintreten kann, muss die Elastizitätsgrenze σ_E grösser sein als $0,75 E s/L$. Nach unserer Erfahrung, die wir durch Beispiele soeben noch belegen werden, liegt bei kalt bearbeitetem oder an sich feinkörnigem Aluminium die $\sigma_{0,02}$ -Grenze in der Gegend von $2 E s/L$, wenn für L röntgenographisch oder elektronenmikroskopisch bestimmte Kristallitendurchmesser eingesetzt werden. Bei diesen Messungen bleiben aber immer vorhandene intrakristallin eingebaute Fremdatome und Gitterbaufehler, die die freie Weglänge der Gleitung ebenso wie Kristallitengrenzen verkürzen, unberücksichtigt. Die Lage der $\sigma_{0,02}$ -Grenze des Aluminiums beim zirka 2,5fachen des derart berechneten untern Grenzwertes für σ_E erscheint also durchaus plausibel.

Die Grösse L , definiert als mittlere freie Weglänge der Gleitung oder als mittlerer Durchmesser der Gleitelemente, ist – wie soeben angedeutet wurde – schwer erfassbar und trägt zu einem guten Teil die Schuld daran, dass wenig experimentelles Material vorliegt, das zur Nachprüfung dieser Gesetzmässigkeiten geeignet wäre. Aussere Dimensionen der Proben, Korngrössen, Mosaikblockgrössen, Konzentrationen von Fremdelementen in fester Lösung, Ausscheidungen und Gitterbaufehler haben alle Einfluss auf die Grösse L . An sehr feinen Drähten kann ein Überwiegen des ersten Faktors, der aussern Probedimensionen, beobachtet werden, was die oft auffallend hohen spezifischen Festigkeiten solcher Feindrähte erklärt. Bei Reinmetallen sind die letztlaufgeführten Einflüsse ausgeschaltet oder reduziert.

Bei Reinaluminium kann durch sehr ausgiebige Kaltbearbeitung die Kristallitengrösse bis zu 1μ Kristallitendurchmesser reduziert werden. Weiter

herunter kommt man nicht; wahrscheinlich vergrössern sich kleinere Kristalliten spontan durch Rekristallisation. Die Pulvermetallurgie erlaubt aber, Rein-aluminiumkörper mit noch kleineren Kristalliten gewissermassen synthetisch herzustellen¹⁾. Deren mittlerer Kristallitendurchmesser kann aus elektronenmikroskopischen Untersuchungen des zur Sinterung verwendeten Pulvers ziemlich genau abgeleitet werden. Wir haben für zwei solcher pulvermetallurgischer Erzeugnisse aus Reinaluminium, über die nähere Angaben in der erwähnten Arbeit¹⁾ zu finden sind, mit 0,5 bzw. 0,3 μ mittlerer Kristallitengrösse die $\sigma_{0,02}$ -Grenze gemessen. In Tabelle 4 sind die erhaltenen Werte, im Vergleich zu maximal kaltbearbeitetem Reinaluminium, den aus der Formel $\sigma_{0,02} \sim 2E s/L$ berechneten gegenübergestellt. Die gemessenen Werte liegen durchgehend etwas höher als die berechneten. Ein Vergleich der drei gemessenen $\sigma_{0,02}$ -Grenzen unter sich zeigt, dass sie sehr gut dem Gesetz gehorchen, nach dem sich die Elastizitätsgrenze umgekehrt proportional zu L verändern muss.

Tabelle 4

Gemessene und nach der Formel $\sigma_{0,02} \sim 2E s/L$ berechnete Elastizitätsgrenzen von Reinaluminium verschiedener Kristallitengrösse L
($E = 7000 \text{ kg/mm}^2$, $s = 2,85 \text{ \AA}$)

	L	kg/mm^2	
		berechnet	gemessen
Aluminium 99,5 . . .	1 μ	4	5
SAP ¹⁾ (1)	0,5 μ	8	11
SAP ¹⁾ (2)	0,3 μ	13	15

1) Geschützte Markenbezeichnung für gesintertes Aluminiumpulver

Die in dieser Arbeit entwickelte Betrachtungsweise führt also zur Auffassung, dass der Widerstand der Metalle gegen plastische Verformung nur indirekt, über den Elastizitätsmodul, mit den Bindungskräften des Gitters zusammenhängt, dass er aber in erster Linie durch die Einpassungsspannungen bestimmt wird, die in jedem Gleitelement – wenn der Zusammenhalt mit den Nachbarelementen gewahrt bleiben soll – aufgebracht werden müssen. Diese Auffassung führt zur Konsequenz, dass ein Idealkristall von makroskopischen Dimensionen einer Verformung praktisch keinen Widerstand entgegengesetzt, also schon bei minimisten Spannungen zu gleiten beginnt. Diese Konsequenz verträgt sich aber gut mit der Erfahrung. Idealkristalle von makroskopischen Dimensionen sind allerdings praktisch nicht realisierbar. Man ist aber heute mit der Raffination vieler Metalle und der Züchtung fehlstellenarmer Kristalle

1) R. IRMANN, A. v. ZEELEADER und F. ROHNER, Festschrift Roš (Vogt-Schild AG., Solothurn 1950), S. 77.

so weit, dass einer Extrapolation auf die Eigenschaften des wahren Idealkristalls in vielen Fällen keine Bedenken mehr entgegenstehen. Man kommt dabei immer auf eine verschwindend kleine Festigkeit des Idealkristalls.

Summary

The first section of the paper is devoted to a brief discussion of some principles of the electron theory of metals, which show that there are no definite localized bonds between any definite atoms of the metallic lattice. Slip is possible without any bonds being disrupted or even any energy spent against bonding forces. In a crystallite making part of a polycrystal slip is possible as soon as the elastic strain energy can, by slipping, be reduced. On this assumption and taking into consideration elastic and plastic transverse contractions a stress value is derived, which can be considered as a lower limit for the advent of slip. It is inversely proportional to the diameter of the crystallite or more exactly to the free path of slip and to some extent dependent on POISSON's ratio. Determinations of the elastic limit of wrought and of sintered pure aluminium samples are given and shown to be in accordance with this theory.

(Eingegangen: 10. Mai 1952.)

Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren

Von FRITZ LÜDTI, Baden¹⁾

1.

Es wird gezeigt, dass die in einer früheren Arbeit über die Travelling-Wave-Tube²⁾ benützten Ausgangsgleichungen folgende Erweiterungen *ohne zusätzliche Ableitungen* über Raumladungskräfte enthalten:

- a) Plasmaschwingung (Plasmafrequenz),
- b) freier Einelektronenstrahl,
- c) Doppelstrahlverstärker,
- d) Travelling-Wave-Tube.

Dabei kommt als wesentliches Resultat heraus, dass die Plasmaschwingung (das heisst die Raumladungskräfte) nur bei b und c, aber nicht bei d einen Einfluss hat. Dieses Resultat steht offenbar im Widerspruch mit dem anderer Autoren und sei damit zur Diskussion gestellt.

Die Ausgangsgleichungen der Arbeit [I] seien nochmals ohne das Ersatzschema angeschrieben.

¹⁾ AG. Brown, Boveri & Cie., Baden.

²⁾ W. FREY und F. LÜDTI, ZAMP 1, 237 (1950) (hier zitiert: Arbeit [I]).

Für die Helix

$$C \dot{U} - I' - I'_1 = 0 , \quad (1)$$

$$L \dot{I} - U' = 0 , \quad (2)$$

$$L dx \dot{I} - dU_1 = 0 . \quad (3)$$

Für den Elektronenstrahl

$$\varrho_0 v + v_0 \varrho - i = 0 , \quad (4)$$

$$i' + \dot{\varrho} = 0 , \quad (5)$$

$$\dot{v} + v_0 v' = \frac{e}{m} E \quad (6)$$

(Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit, Strich Ableitung nach der Koordinate x , Index 0 Gleichstromanteil).

Dazu die Kopplungsgleichung

$$I_1 = i + C_l \dot{E} \quad (7)$$

mit

$$dU_1 = E dx . \quad (8)$$

$C_l = F/(4\pi)$ ist die Längskapazität der Verzögerungsleitung pro Längeneinheit, über welche Kreis und Elektronenstrahl miteinander gekoppelt sind. Gleichung (7) entspricht der fundamentalen Maxwellschen Gleichung über die totale divergenzfreie Stromdichte

$$c = i + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E} .$$

(In unseren Gleichungen sind Ströme statt Stromdichten und Ladungen pro Länge 1 statt Ladungsdichten verwendet.) Es ist von ausschlaggebender Bedeutung, dass E das totale Feld ist und sich in ein inneres E_i und ein äusseres E_a aufspalten lässt (vgl. Arbeit [I]).

E_i führt von der Raumladung her und ist gegeben durch:

$$\dot{E}_i = - \frac{i}{C_l}$$

für $I_1 = 0$ (keine Helix).

E_a ist das Feld, das durch die Ladungen auf der Kopplungskapazität $\dot{Q} = I_1$, für $i = 0$ (kein Elektronenstrahl) entsteht.

$$\dot{E}_a = \frac{I_1}{C_l} .$$

Die eingangs erwähnten Erweiterungen werden nun einzig durch den Ersatz von Gleichung (7) durch

$$I_1 = \sum i_k + C_l \dot{E} , \quad (7')$$

das heisst im allgemeinen Fall für mehrere Elektronenstrahlen, erreicht. Wie in der Arbeit [I] werden aus den Gleichungen (1) bis (6) und (7') einerseits das influenzierte Feld E in Funktion der Elektronenströme i_k und andererseits die modulierten Elektronenströme i_k als Funktion des Feldes E ausgerechnet, wobei E explizit in E_i und E_a aufgespalten ist; man erhält bei Verwendung des Ansatzes

für alle Wechselgrößen:

$$\sim e^{pt} e^{\Gamma x}, \quad (p = j \omega)$$

$$\left(E_a - \frac{\Sigma i_k}{p C_l} \right) = \frac{p \Gamma^2 L}{p^2 L C_l - \Gamma^2 (1 + p^2 L C_l)} \Sigma i_k, \quad (8)$$

$$i_k = \frac{e/m \cdot i_{0k}/v_{0k} \cdot p}{(p + \Gamma v_{0k})^2} \left(E_a - \frac{\Sigma i_k}{p C_l} \right). \quad (9)$$

2. Lösung der Gleichungen (8) und (9)

Für die verschiedenen Fragestellungen können die Gleichungen einzeln oder in Kombination diskutiert werden.

a) Die Plasmafrequenz ergibt sich als direktes Nebenresultat aus (9) für ein ruhendes Elektronenplasma $v_0 = 0$ ohne elektrischen Kreis $E_a = 0$ mit $p = j \Omega$ zu

$$\Omega^2 = \frac{c}{m} + \pi \frac{\varrho_0}{F} \quad \left(\varrho_0 = \frac{i_0}{v_0} \right) \quad (10)$$

und ist schon früher aus ähnlichen Grundgleichungen abgeleitet worden¹⁾.

b) Ein Elektronenstrahl. Für $v_0 \neq 0$ erhält man aus (9) mit dem Wert (10) die charakteristische Gleichung für Γ

$$1 + \frac{\Omega_1^2}{(p + \Gamma v_{01})^2} = 0. \quad (11)$$

c) Zwei Elektronenstrahlen (Doppelstrahlverstärker). Es folgt analog aus (9) durch Elimination von i_1 und i_2

$$1 + \frac{\Omega_1^2}{(p + \Gamma v_{01})^2} + \frac{\Omega_2^2}{(p + \Gamma v_{02})^2} = v. \quad (12)$$

d) Ein Elektronenstrahl mit Helix (Travelling-Wave-Tube). Hierfür ergibt die Elimination von i und $E = E_a - (i/p C_l)$ aus (8) und (9)

$$1 - \frac{-\Gamma^2 \Gamma_0^2 / C}{\Gamma^2 - \Gamma_0^2} \cdot \frac{e/m \cdot i_0/v_0}{(p + \Gamma v_0)^2} = 0. \quad (13)$$

Γ_0 ist der Wert für die Ausbreitungskonstante, den man aus (8) für die elektronenstrahlfreie Helix $i = 0$ erhält (vgl. Arbeit [I]).

3. Diskussion und Vergleich mit anderen Resultaten

Den Vergleich machen wir mit einer von R. WARNECKE, O. DÖHLER und W. KLEEN gemachten Publikation²⁾.

b und c stimmen mit a und b der Arbeit [II] überein. Die Raumladungskräfte und die Wechselwirkungskräfte zwischen zwei Strahlen erscheinen hier als Wirkung des inneren Feldes gemäss Gleichung (7).

¹⁾ G. JOOS, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 5. Auflage (Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Leipzig 1943), S. 676.

²⁾ Wireless Engineer 28, 167 (1951), Part. 1, Nr. 6 (hier zitiert: Arbeit [II]).

Bezüglich d tritt eine Diskrepanz mit der obgenannten Arbeit und den dort zitierten Autoren auf. Die Berücksichtigung der Raumladungskräfte gibt nämlich hier kein neues Resultat gegenüber den Berechnungen ohne Raumladungskräfte (Fall c in Arbeit [II], welcher gleichbedeutend mit dem Resultat der Arbeit [I] ist). Fall d der Arbeit [II] ist nach dieser Berechnung hinfällig.

Der Grund scheint uns in folgendem zu liegen: Die Berechnung der anderen Autoren erfolgt nicht unter Benützung der fundamentalen Kopplungsgleichung (7), sondern nur mit Hilfe des äusseren Feldes, zum Beispiel mit einer Energiebilanz (Arbeit [II]). Das innere Feld wird durch eine Zusatzbetrachtung eingeführt. Dadurch entsteht eine Unsymmetrie in den Gleichungen. Wenn zum Beispiel in Gleichung (8) links E durch E_a ersetzt wird, so bekommen wir mit (9) auch eine von Ω abhängige charakteristische Gleichung für die Travelling-Wave-Tube; sie entspricht dem Fall d der Arbeit [II] bzw. den dort zitierten Autoren CHU und JACKSON, RYDBECK, LAPOSTOLLE. Der tiefere physikalische Grund liegt offenbar darin, dass durch das mitlaufende Feld in der Helix die Raumladungskräfte kompensiert werden, was bei freien Elektronenstrahlen nicht der Fall ist, und dies scheint unabhängig vom Kopplungsfaktor α zwischen Elektronenstrahl und Helix zu sein (vgl. Arbeit [I]; α hier = 1 gesetzt).

Die Folgerungen aus diesen Betrachtungen sind also in Übereinstimmung mit den Messungen von CUTLER und QUATE¹⁾ und anderen Autoren, wonach durch die Überlagerung der beiden Raumladewellen

$$\Gamma_1 = -j \frac{\omega}{v_0} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right), \quad \Gamma_2 = -j \frac{\omega}{v_0} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right)$$

nach (11) längs eines *freien* Elektronenstrahles im Triftraum Maxima und Minima der Verdichtungen auftreten und die Rauschzahl eines Klystrons bei passender Wahl des Laufwinkels zwischen Kathode und Modulationsresonator auf ein Minimum herabgedrückt werden kann. Dies gilt auch für den Eintritt in eine Travelling-Wave-Tube, nicht aber für deren Interaktionsraum.

Summary

It is shown that plasma oscillations have an effect in the field-free drift space of the klystron and in the double-beam tube, but not in the interaction space of the travelling-wave tube.

(Eingegangen: 20. Mai 1952.)

¹⁾ C. C. CUTLER und C. F. QUATE, Phys. Rev. 80, 875 (1950).

**Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft
vom 3. Mai 1952 in Baden**

Berichte über angewandte Physik und Mathematik

Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, von H. ZIEGLER, ETH., Zürich.

Die mechanischen Systeme können¹⁾ in konservative [und zwar (a) nicht-gyroskopische und (b) gyroskopische] sowie nichtkonservative [(c) dissipative, (d) zirkulatorische und (e) instationäre] Systeme eingeteilt werden. Die bei Stabilitätsuntersuchungen meist verwendeten statischen Verfahren (Gleichgewichts- und Energiemethode) sind aber nur bei Systemen der Gruppe (a) mit dem kinetischen gleichwertig. Bei anderen, vor allem solchen der Gruppe (d), führen sie vielfach zu Fehlschlüssen²⁾.

Die Knicklast des tangential gedrückten Stabes, von M. BECK, Zürich³⁾.

Da die Richtung der tangentialen Druckkraft durch den Ort des Stabendpunktes allein nicht bestimmt wird, ist diese Belastung nichtkonservativ: es liegt ein zirkulatorisches System vor⁴⁾. Die Knicklast muss deshalb mit dem kinetischen Stabilitätskriterium berechnet werden⁵⁾; dabei zeigt sich eindrücklich das Versagen des statischen Verfahrens.

Elektronisches Rechengerät zur Auswertung von Windkanalmessungen, von H. R. VOELLMY, Zürich⁶⁾.

In der Messtechnik steht man immer wieder vor der Notwendigkeit, eine Vielzahl von zunächst bedeutungslosen Messgrössen in endgültige Messresultate umzurechnen. Diese Auswertearbeit benötigt nicht nur viel Zeit, sie ist auch eine ständige Quelle für Rechenfehler. Es liegt auf der Hand, hier Rechengeräte einzusetzen, welche die Auswertung rasch und fehlerfrei durchführen.

Im folgenden wird ein elektronisches Rechengerät beschrieben, das zur Auswertung von 3-Komponenten-Messungen mittels Straingage-Wagen am Windkanal dient. Die drei Komponenten M , W und A müssen dabei nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{M}{q} &= \frac{-c_1 n_1 + c_2 n_2}{q}, & N &= c_3 n_1 + c_4 n_2, \\ \frac{W}{q} &= \frac{T \cos \alpha + N \sin \alpha}{q}, & \alpha &= \alpha^* + c_5 N, \\ \frac{A}{q} &= \frac{N \cos \alpha - T \sin \alpha}{q}, & T &= c_6 t + c_7 \alpha, \end{aligned}$$

¹⁾ Wie eine noch unveröffentlichte Untersuchung zeigt.

²⁾ Vgl. H. ZIEGLER, Ing.-Arch. 20, 49 (1952).

³⁾ Assistenz für technische Mechanik, ETH.

⁴⁾ Vgl. Referat von H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*.

⁵⁾ Vgl. M. BECK, ZAMP 3, 225 (1952).

⁶⁾ Contraves AG.

wobei die Größen n_1 , n_2 und t die Messgrößen sind, α^* und q Einstellgrößen bedeuten und die Koeffizienten $c_1 \dots c_7$ feste Werte sind. Das in Figur 1 dargestellte Blockschema zeigt, wie in diesem Analogiegerät obige Formeln durch Addieren und Subtrahieren von Spannungen und durch Multiplizieren von Spannungen mit Wellenstellungen realisiert werden. Mittels Potentiometern werden die Mess- und Einstellgrößen in ihre entsprechenden Spannungswerte verwandelt, wobei ein auf jedes Potentiometer umschaltbares Nachlaufvoltmeter die zahlenmässige Kontrolle der eingestellten Werte erlaubt. Sobald alle Eingangsgrößen eingestellt sind, werden mit dem gleichen Nachlaufvoltmeter der Reihe nach die Resultatwerte α , M/q , W/q und A/q abgetastet und wiederum durch das Zählwerk angezeigt.

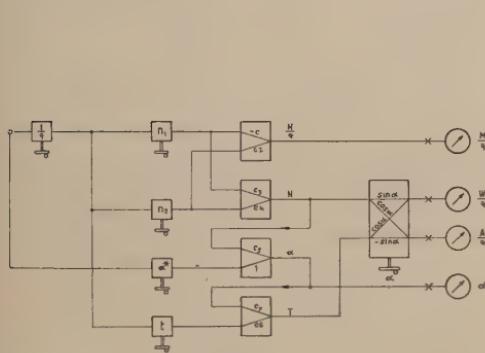


Fig. 1

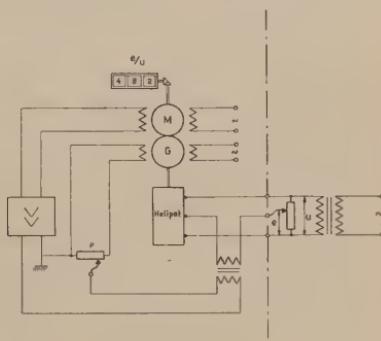


Fig. 2

In Figur 2 ist das Schema des Nachlaufvoltmeters dargestellt. Die einzustellende (oder zu messende) Spannung e wird mit der Spannung an einem genau linearen Potentiometer verglichen (sogenannter Heliopot, Präzisionspotentiometer mit total 10 Umgängen). Die Differenzspannung speist über einen Verstärker den Motor M stets so, dass die Differenzspannung verschwindet (sogenannter Nachlauf). Ein an der Potentiometerwelle mit entsprechendem Übersetzungsverhältnis angeschlossener Umlaufzähler zeigt somit direkt das Verhältnis der Spannung e zur Spannung U am Potentiometer an. Der auf der gleichen Welle sitzende Generator G bewirkt mit seiner Gegenspannung lediglich eine Stabilisierung des ganzen Nachlaufsystems, wobei die Nachlaufzeitkonstante am Potentiometer P eingestellt werden kann.

Der grosse Vorteil des Vergleichsvoltmeters mit Nachlauf besteht neben der zahlenmässigen Angabe der Werte in seiner Unempfindlichkeit gegen Schwankungen der Referenzspannung U , da stets ein Spannungsverhältnis bestimmt wird.

Das Rechengerät, das nicht grösser als ein normaler Radio ist, enthält demnach neben dem Netzeil einen Röhrengenerator mit Verstärkern zur Erzeugung der Referenzspannung U und zur Speisung der Motor-Generator-Gruppe, das Nachlaufsystem mit den dazugehörigen Verstärkern und das Rechenetzwerk.

Die Genauigkeit des Rechengerätes hängt im wesentlichen von der Linearität des Heliops ab und beträgt rund 2 Promille, was für die meisten technischen Anwendungen genügen dürfte.

Während der Messung am Windkanal können nun von einem Gehilfen die laufenden Auswertungen vorgenommen und sogleich graphisch aufgetragen werden, so dass der Versuchingenieur sein Messprogramm stets den erhaltenen Resultaten anpassen kann!

In weiterer Vereinfachung des Mess- und Auswertevorganges ist vorgesehen, die von den Strainage-Wagen gelieferten Spannungen direkt in das Rechengerät zu leiten, so dass der Vorgang des Übertragens der Werte wegfällt. Ferner werden die Resultate von mehreren Vergleichsvoltmetern auf Schreibgeräte übertragen, so dass die gesuchten aerodynamischen Beiwerte direkt als Funktion des ebenfalls aufgezeichneten Anstellwinkels aufgetragen werden.

Analogierechengeräte mit linearen Potentiometern, von A. P. SPEISER, Zürich¹⁾.

Unter Verwendung von linear gewickelten Präzisionspotentiometern der käuflichen Bauart und von ohmschen Widerständen lassen sich Rechengeräte bauen. Die elementaren Rechenoperationen werden durch einfache Schaltungen ausgeführt. Außerdem können vorgegebene Funktionen mit einer oder mehreren Variablen durch Approximation mittels rationaler Funktionen dargestellt werden; entsprechende Verfahren zur Ermittlung der Schaltungsparameter sind entwickelt worden. Auf dieser Grundlage sind Geräte zur Auswertung von ständig wiederkehrenden mathematischen Ausdrücken sowie zur Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen gebaut worden. Die Geräte können mit bescheidenen Kosten und innert kurzer Frist gebaut werden; sie sind robust, einfach zu bedienen und benötigen nur einfachste Stromquellen. Ein ausführlicher Bericht über diese Konstruktionen wird demnächst erscheinen.

Schaufelschwingungen, von CH. BELLENOT, Baden²⁾.

Der Autor führte einen Film über Schwingungen an Flügelgittern vor und gab dazu einige theoretische Erläuterungen.

Eine neue Auswertemethode für Hitzdrahtmessungen, von G. DÄTWYLER, Zürich.

An Hand der Kingschen Gleichung (auch in stark verallgemeinerter Form) über das Wärmegleichgewicht bei Hitzdrahtsonden in Strömungen lässt sich zeigen, dass ein einfacher linearer Zusammenhang besteht zwischen äquivalenten Geschwindigkeits- und Heizstromänderungen, die entgegengesetzt gleiche Temperatur- und Widerstandsänderungen der Sonde bewirken.

Der Proportionalitätsfaktor zwischen den äquivalenten Geschwindigkeits- und Heizstromänderungen ist eine eindeutige und universell gültige, ein für alle mal berechenbare Funktion der Reynolds-Zahl des Hitzdrahtes in der Strömung, wie durch zahlreiche Messresultate experimentell bestätigt ist.

Hieraus lässt sich eine neue, einfache und rasche Auswertemethode für Turbulenzmessungen mit dem Hitzdrahtanemometer gewinnen.

Wahl der Grundbahnen zur Bestimmung ganzer Flugbahnscharen bei Raketen, von E. ROTH, Luzern, und R. SÄNGER, ETH., Zürich.

In einer früher erschienenen kurzen Mitteilung³⁾ wurde darauf hingewiesen, wie ein Satz von POINCARÉ über die Parameterabhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen zur Berechnung von Flugbahnscharen herangezogen werden kann. Sollen bei der Interpolation die extremalen Abweichungen von den wahren Werten dem Betrage nach einander gleich sein, so bedeutet dies eine spe-

¹⁾ Institut für Angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ AG. Brown, Boveri & Cie.

³⁾ E. ROTH-DESMEULES, Zur Berechnung der Flugbahnscharen ferngesteuerter Raketen, ZAMP 2, 487–489 (1951).

zielle Wahl der Parameterwerte der zu berechnenden Grundbahnen. Es wird gezeigt, dass nach geeigneter Variablentransformation diese Werte sich als Nullstellen von Tschebyschew'schen Polynomen ergeben.

Synchronisierung von Reflexoszillatoren, von A. H. ABDEL DAYEM, Zürich¹⁾.

Es ist bekannt, dass man einen selbsterregten Generator durch eine eingeprägte Fremdspannung synchronisieren kann, sofern die Frequenz des Fremdsignals angenähert in einem einfachen rationalen Verhältnis zur Frequenz des selbsterregten Signals steht. Es existiert immer eine bestimmte Synchronisierungsbreite, welche sowohl von der Grösse des Fremdsignals und den Daten des Schwingssystems als auch von den Eigenschaften der nichtlinearen Kennlinie des Generators abhängig ist.

Wie in den verschiedenen Frequenzgebieten der Hochfrequenztechnik findet man auch im Mikrowellengebiet wichtige Anwendungen für den synchronisierten Generator. Daher ist die Kenntnis von Theorie und Anwendung der Synchronisierung selbsterregter Generatoren auch im Mikrowellengebiet von grosser Wichtigkeit. In einer demnächst erscheinenden Arbeit²⁾ wird diese Frage insbesondere am Reflexoszillator (Reflexklystron) untersucht, der im Bereiche von 8 cm bis 1 cm Wellenlänge Verwendung findet, wenn keine grossen Leistungen erforderlich sind, wie zum Beispiel beim Überlagerungsempfang, bei Signalgeneratoren für Messzwecke usw.

Im wesentlichen besteht ein Reflexoszillator aus einem Schwingssystem (Hohlräumresonator), das durch einen gesteuerten Strom erregt wird, das heisst einen Strom, der von der Spannung abhängig ist, die am Schwingssystem liegt. Diese Strom-Spannungs-Abhängigkeit ist durch eine nichtlineare Funktion darstellbar, die durch den Mechanismus von Geschwindigkeitsmodulation und «Bunching» gegeben ist. Mit Hilfe dieses vereinfachten Bildes lässt sich der eingeschwungene

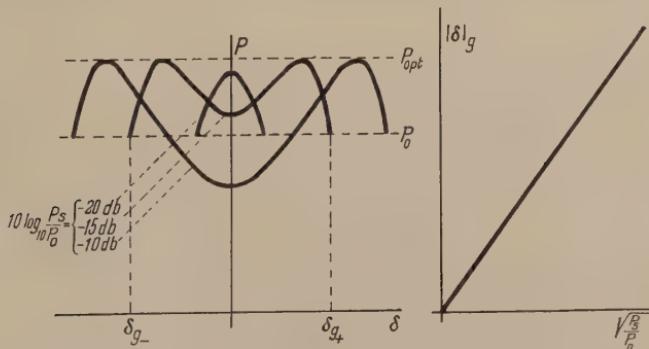


Fig. 1

Verhalten des durch ein Fremdsignal synchronisierten Reflexoszillators.

- P Ausgangsleistung im synchronisierten Zustand;
- P_0 Ausgangsleistung im «ungestörten» Zustand;
- P_{opt} optimale Ausgangsleistung vom Reflexoszillator;
- P_s Leistung des eingeprägten Fremdsignals;
- δ Verstimmung;
- $|\delta|_g$ Grenzverstimmung des Synchronisierungsgebietes.

¹⁾ Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

²⁾ Dissertation ETH. (1952).

Zustand des synchronisierten Reflexoszillators berechnen. Für einen durch ein unabhängiges Fremdsignal synchronisierten Reflexoszillator ergibt die theoretische Berechnung die Resultate in Figur 1.

Für den Fall der gegenseitigen Synchronisierung zweier identischer Reflexoszillatoren sind die theoretisch berechneten Kurven in Figur 2 dargestellt.

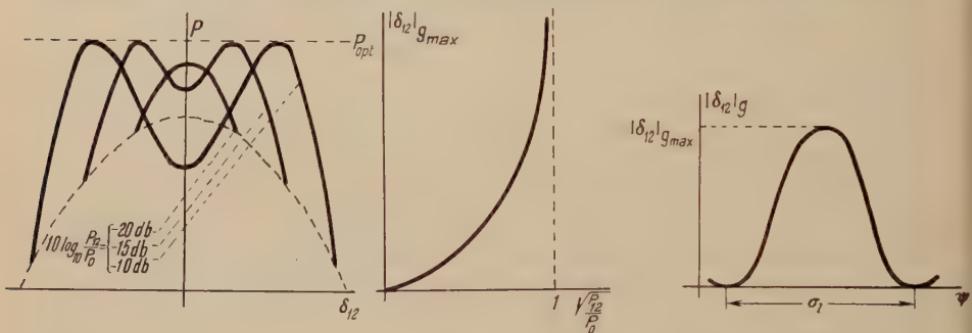


Fig. 2

Verhalten zweier identischer Reflexoszillatoren im gegenseitigen Synchronisieren.

- P Ausgangsleistung von einem Reflexoszillator;
- P_{12} Leistung gekoppelt von einem Oszillator zum anderen;
- δ_{12} relative Verstimmung der Hohlraumresonatoren;
- ψ Länge des Kopplungsweges, dargestellt als Winkel.

Das Experiment bestätigt in allen Teilen die Aussagen der Theorie.

Ein Laboratoriumsgerät zum Auffinden von Undichtigkeiten in Hochvakuumssystemen (Leak-detector), von G. WEIBEL, Zürich¹⁾.

Angesichts der technologischen Schwierigkeiten, hochvakuumdichte Gefäße und Systeme (Glas-Metall-Verschmelzungen, Schweiß- und Lötnähte, Gussteile usw.) herzustellen, haben Geräte zur Lokalisierung von Undichtigkeiten grosse Bedeutung gewonnen. Die Empfindlichkeit solcher Instrumente ist je nach Methode und apparativem Aufwand sehr unterschiedlich.

Im Institut für Hochfrequenztechnik an der ETH wurde für das Arbeiten mit demontierbaren, experimentellen Röhrensystemen und verschiedenen Hilfsapparaten das nachfolgend kurz beschriebene Gerät entwickelt, welches hohe Empfindlichkeit bei relativ geringem Aufwand erzielt. Das Prüfen findet unter normalen Vakuum-Betriebsbedingungen statt. Mit einem Suchstrahl von Testgas wird das System von aussen her abgestrichen, während ein dem Vakuumraum angeschlossener Indikator auf Spuren eindringenden Testgases reagiert.

Das System spricht auf den beim Überstreichen der Undichtigkeit hineindifundierenden Testgasimpuls genau so an wie ein elektrisches Netzwerk aus R - und C -Elementen auf einen eingespeisten Stromstoss (Analogien in Grundgleichungen); Zeitkonstanten, Impulsflankensteilheit und asymptotischer Druckanstieg lassen sich aus den Systemgrößen ermitteln.

Die Verhältnisse an der Indikatormesszelle, hier beim vorliegenden Gerät ein normales Magnetron-Ionisationsmanometer («Philips-Manometer»), wurden ge-

¹⁾ Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

nauer betrachtet; sowohl die Änderungen der Partialdrücke Luft–Testgas als auch damit verbundene Änderungen des Totaldruckes bewirken eine differentielle Variation des Manometerstromes. In einer Brückenschaltung oder mit Hilfe eines differenzierenden Netzwerkes wird sodann eine Signalspannung gewonnen, einem streng symmetrischen Gleichstromverstärker und Modulator zugeführt, welcher ein akustisches Signal mit einer der Eingangsspannung proportionalen Frequenz erzeugt.

Theoretisch kann der gebaute Leak-detector bei einem Vakuumrezipienten von $V = 5 \text{ l}$ und einer effektiven Saugleistung $S = 2 \text{ l/s}$ beispielsweise im Druckgebiet von $p = 10^{-5}$ bis 10^{-6} mm Hg eine Einrinnmenge von $Q = 10^{-8} \text{ l/s mm Hg}$ mit einer Zeitkonstanten von $T = 2,5 \text{ s}$ noch deutlich anzeigen ($\Delta f = 100 \text{ Hz}$). Durch interne Gasquellen (Gasausbrüche diverser Art bei nicht gut entgasten Systemen) wird beim beschriebenen Indikator die nutzbare Empfindlichkeit herabgesetzt. Es wurde auf eine symmetrische Brückenschaltung mit zwei Manometerröhren verwiesen, die es gestattet, mit einfachen Mitteln zwischen Testgas und systemeigenem Gas zu diskriminieren (gasselektive Anzeige) und damit die volle Empfindlichkeit auszunutzen.

Literatur:

F. M. PENNING, *Tiefdruckmanometer*, Philips' techn. Rdsch. 2, 201–208 (1937).
 F. M. PENNING und K. NIENHUIS, *Bauart und Anwendung einer neuen Ausführung des Philips-Vakuummeters*, Philip's techn. Rdsch. 11, 116–123 (1949).

Über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren, von F. LÜDI, Baden¹⁾.

Es wird gezeigt, dass die Plasmaschwingung im feldfreien Triftraum des Klystrons und in der Zweielektronenstrahlröhre einen Einfluss hat, nicht aber im Interaktionsraum der Travelling-Wave-Tube. Ausführliche Publikation siehe ZAMP 3, 390 (1952).

Wärmespannungen in elastischen Körpern, von F. SALZMANN, Zürich²⁾.

Ausführliche Darstellung dieses Problems siehe ZAMP 3, 129 (1952).

Der Einfluss der Molzahländerung auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsmaschinen, von W. TRAUPEL, Winterthur³⁾.

Es wird gezeigt, dass die Änderung der Molzahl, die bei der Verbrennung im allgemeinen auftritt, einen Einfluss auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsmaschinen (Verbrennungsmotoren und Gasturbinen) ausübt. Molzahlvergrösserung verbessert den thermischen Wirkungsgrad, Molzahlverkleinerung verringert ihn. Am Beispiel eines idealisierten Gasturbinenprozesses wird dies anschaulich gemacht. Bei Molzahlvergrösserung wäre es grundsätzlich sogar denkbar, aus einem Kreisprozess Arbeit zu gewinnen, selbst wenn die ganze fühlbare Wärme (Heizwert) dem Prozess sogleich wieder nach aussen entzogen wird. Damit besteht auch grundsätzlich die Möglichkeit, den Carnot-Wirkungsgrad zu überschreiten. Es wird dabei eine gewisse Wärmemenge der äusseren Umgebung entzogen und in Arbeit verwandelt, was keinen Widerspruch zum zweiten Hauptsatz darstellt, da ja außerdem eine chemische Umsetzung vollzogen wird und die Entropiesumme im ganzen zunimmt.

¹⁾ AG. Brown, Boveri & Cie.

²⁾ Forschungsabteilung Escher-Wyss AG.

³⁾ Gebr. Sulzer AG.

Bei technischen Prozessen wird der Einfluss in bestimmten Fällen deutlich bemerkbar, und zwar im negativen Sinne (Molzahlverminderung bei Brenngasen, die einen grossen Gehalt an CO aufweisen). Ein Brennstoff, bei dem ein grosser positiver Effekt erzielt werden könnte, wäre Methylalkohol. Genaueres siehe: W. TRAUPEL, *Der Einfluss des Brennstoffes auf den Wirkungsgrad von Verbrennungsmaschinen*, Allg. Wärmetechn. 3, 1–9 (1952).

Rechnungs- und Messergebnisse über Hautkondensation an gewellten Oberflächen, von R. GREGORIG, Zürich¹⁾.

Nach einer einleitenden Übersicht über Haut- und Tropfenkondensation wird die Möglichkeit der Hautkondensation an einer unebenen Oberfläche erörtert. Die Oberflächenspannungen rufen, der verschiedenen Krümmungen der Kondensatoroberfläche wegen, sehr starke Druckgradienten hervor. Letztere können ein grosses Vielfaches (ein paar Zehnerpotenzen) grösser als diejenigen des Schwerefeldes sein. Starke Druckgradienten ergeben, aus Gleichgewichtsgründen, dünne Kondensathäute, was nach der Theorie von NUSSELT zu grossen Wärmeübergangszahlen führt. Für einen Kondensator mit vertikalen Rohren, die mit Rillen parallel zur Rohrachse versehen waren, sind für gegebene geometrische Verhältnisse die mit Differenzenrechnung erhaltenen Wärmeübergangszahlen angegeben worden. Letztere sind durch Versuche bestätigt. Zwei Kennzahlen der Modellähnlichkeit bestimmen die Nusseltsche Zahl des Wärmeübergangs. An Hand dieses Ähnlichkeitsgesetzes, das mit Versuchen bestätigt worden ist, wurden für verschiedene Dämpfe die Wärmeübergangszahlen an gerillten Rohren mit jenen an glatten Rohren verglichen. Dabei betrug das Verhältnis der letztgenannten Wärmeübergangszahlen etwa (5 : 7) zu 1.

Paul Felix Neményi
June 5, 1895 – March 1, 1952

NEMÉNYI's life-long interest was pure mechanics. He worked mainly in five fields: static elasticity, fluid dynamics, hydrology and hydraulics, organization of mechanics, methods of research.

The first of his three major discoveries in elasticity was a new singularity method [Z. angew. Math. Mech. 9, 488 (1929); 10, 383 (1930)]. A number of rather complicated singularities, obtained by confluence of simple ones, are classified in terms of their influences in accordance with a duality principle, which generalizes MAXWELL's reciprocity theorem.

His continuing interest in analogies may well have begun with his own discovery that the stream-lines of any potential flow of an incompressible fluid may serve also as stress trajectories for a plane elastic system. He first approached the problem through his method of singularities (Proc. int. Congr. appl. Mech. 1930); later [Z. angew. Math. Mech. 12, 364 (1931)], he gave an analytic proof of the beautiful reformulation now called "NEMÉNYI's Theorem": given any net of isothermal curves, there exists a five parameter family of plane stress systems for which these curves are stress trajectories. Phrased thus in terms of pure elasticity, it suggests another question: to what extent is the solution of a problem in continuum mechanics characterized by an associated trajectory system? This subject attracted NEMÉNYI throughout the rest of his life.

¹⁾ Escher-Wyss, Maschinenfabriken AG.

His third major discovery in elasticity is the reduction of the general extensional theory of thin shells of revolution with meridian $y = f(x)$ to the remarkably simple equation

$$\frac{U_n''}{U_n} + (n^2 - 1) \frac{f''}{f} = 0.$$

From "NEMÉNYI's stress functions" U_n , the general solution is obtained immediately [Proc. 6th int. Congr. Math. (1936), Proc. nat. Acad. Sci. 29, 159–162 (1943)].

All this theoretical work illustrates the inverse or semi-inverse approach, which he summarized in a fine organizational summary [*Advances in Applied Mechanics*, Vol. II (Academic Press, New York, 1951), p. 123–151]. In papers written jointly with PRIM [Proc. nat. Acad. Sci. 34, 119 (1948); J. Math. Phys. 27, 130 (1948) and others], he applied it to obtain numerous exact solutions of the nonlinear equations of gas dynamics, many of them representing rotational and three-dimensional flows of nonuniform total energy.

For any person with a genuine question in mechanics, NEMÉNYI was always willing to supplement his great knowledge and deep understanding by hours of library work. Since 1946 many of his ideas were worked out by his pupils (in temporal order): C. TRUESDELL, R. C. PRIM, A. VAN TUYL, A. W. SÄENZ, R. TUPPIN, J. L. ERICKSEN. He had held posts in many institutions in Europe and America; at the time of his death he was Head of the Theoretical Mechanics Section at the U. S. Naval Research Laboratory.

C. TRUESDELL, Indiana University.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von LÖSCH-SCHOBLIK (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig 1951). 205 S., 22 Abb.; \$4.03.

Die von L. EULER in die Analysis eingeführte Gammafunktion (Fakultät) und die verwandten Funktionen kommen in so vielen Gebieten der Mathematik vor und sind für so zahlreiche Anwendungen ein unentbehrliches Instrument, dass die Kenntnis ihrer Haupteigenschaften zum Rüstzeug des Mathematikers und des Physikers gehören muss. Das vorliegende Buch – dessen Bearbeitung durch F. LÖSCH unter Zugrundelegung eines von F. SCHOBLIK hinterlassenen Manuskriptes erfolgte – gibt eine Einführung in die Theorie und in die Anwendungen dieser Funktionen. Die Theorie ist aber an Formeln und Entwicklungen so reichhaltig, dass eine Auswahl nötig war; sie wurde im Hinblick auf die Anwendungen auf Physik und Technik getroffen. Das Studium des Werkes kann jedem empfohlen werden, der im Besitze der Elemente der Theorie der analytischen Funktionen ist und sich eine gründliche Kenntnis der Gamma- und der verwandten Funktionen aneignen will.

Inhaltsangabe: I. (S. 1–100). – 1. Die Produktdarstellungen und die fundamentalen Eigenschaften der Fakultät. – 2. Die asymptotischen Darstellungen der Fakultät (Stirlingsche Formel). – 3. Die Reihendarstellungen der Fakultät. – 4. Die Integraldarstellungen der Fakultät. – 5. Auswertung bestimmter Integrale durch Fakultäten. – 6. Die Funktionalgleichung $R_1(z) f(z+1) + R_2(z) f(z) = 0$.

Anwendungen auf die hypergeometrische Reihe und auf das Integral von MELLIN-BARNES.

II. (S. 101–151). – 1. $(z, \varrho)!$ und $Q(z, \varrho)$ als Funktionen von z . – 2. $(z, \varrho)!$ und $Q(z, \varrho)$ als Funktionen von ϱ . – 3. Die Integralexponentiale und verwandte Funktionen (Integralcosinus und -sinus usw.). – 4. Das Fehlerintegral und verwandte Funktionen. – 5. Die Hermiteschen Polynome. – 6. Die Funktionen des parabolischen Zylinders und die Whittakerschen Funktionen.

III. (S. 152–203). Anwendungen. – 1. Eine elektrostatische Aufgabe. – 2. Die Sitzreihenüberhöhung im Theater. – 3. Zur strahlentheoretischen Treffertheorie. – 4. Über kontinuierliche Leibrenten. – 5. Der Strahlungswiderstand einer Vertikalantenne. – 6. Wahrscheinlichkeits- und Fehlerrechnung. – 7. Wärmeleitung. – 8. Die astronomische Strahlenbrechung. – 9. Beugung elektromagnetischer Wellen. – 10. Übergangsbögen bei Bahnen.

M. Plancherel

The Lebesgue Integral. By J. C. BURKILL, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 40 (Cambridge University Press, Cambridge 1951). 87 pp.; 12s, 6d.

Depuis la parution en 1905 du livre de LEBESGUE *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de nombreuses et importantes simplifications ont été apportées par DE LA VALLÉE POUSSIN et d'autres à l'exposition et à la démonstration des théorèmes. Il est maintenant possible d'exposer cette théorie sous une forme extrêmement simple et accessible à toute personne tant soit peu familiarisée avec les éléments du calcul différentiel et intégral. Celle que présente M. BURKILL dans cet opuscule est basée sur la théorie de la mesure des ensembles; elle répond pleinement aux conditions de clarté et de simplicité que l'on peut maintenant exiger et sa lecture peut être recommandée à qui désire être mis rapidement au courant des théorèmes essentiels de la théorie de l'intégrale.

Contenu: I. Ensembles de points. II. Mesure. III. L'intégrale de LEBESGUE. IV. Différentiation et intégration. V. Autres propriétés de l'intégrale. VI. L'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES. Solution des exemples et des problèmes.

M. Plancherel

Einführung in die theoretische Physik. Bd. 3, Teil 2, Quantentheorie. Von C. SCHAEFER (W. de Gruyter, Berlin 1951). 510 S., 88 Abb.; DM 40.—.

Der in der zweiten Auflage vorliegende Band III, 2 enthält die Lehren der Quantentheorie bis und mit den Diracschen Gleichungen. Zunächst werden die Schwierigkeiten der klassischen Physik in der Theorie der Strahlung, der spezifischen Wärme, des Photoeffekts usw. geschildert. Es folgt an Hand der Bohrschen Theorie eine sich über vier Kapitel erstreckende Darlegung des Atommodells von BOHR und die sich daraus ergebenden Folgerungen für Atombau, Spektren und periodisches System. Dann wird in Kapitel 6 die Wellenmechanik eingeführt im Anschluss an DE BROGLIE und SCHRÖDINGER. Ihre Anwendung und Deutung behandeln Kapitel 7 und 8. Darauf wird nochmals das Problem der Strahlung aufgegriffen und, jetzt mit wellenmechanischen Methoden, eingehend geschildert (Auswahl- und Polarisationsregeln, Übergangswahrscheinlichkeiten, Dispersion und Ramaneffekt). Das zehnte Kapitel schliesslich enthält die Diracsche Theorie des Elektrons und Positrons.

Gegenüber der ersten Auflage sind keine wesentlichen Änderungen im Sinne einer Modernisierung vorgenommen worden, was im Hinblick auf die erprobte Darstellungsweise des Verfassers zu bedauern ist.

W. Baumgartner

Funzioni ellittiche. Di FRANCESCO TRICOMI (N. Zanichelli, Bologna 1951). 353 p.; l. it. 4500.—.

L'auteur s'est proposé de donner au lecteur qui connaît les premiers éléments de la théorie des fonctions analytiques un exposé aussi simple que possible de la théorie des fonctions elliptiques lui permettant de l'appliquer sans difficulté à des problèmes concrets. Laissant de côté les applications à l'algèbre et à la théorie des nombres, l'auteur a réussi à rassembler dans cet ouvrage l'essentiel de ce que doit connaître celui qui veut appliquer les fonctions elliptiques aux problèmes posés par la physique et la technique et pousser leur solution jusqu'aux résultats numériques. L'ouvrage répond donc pleinement au but cherché.

Un premier chapitre expose la théorie des fonctions elliptiques de WEIERSTRASS et la représentation d'une fonction elliptique générale par ces fonctions. Il se termine par l'étude du comportement des fonctions de WEIERSTRASS à invariants réels.

Le second chapitre traite des intégrales elliptiques, de leur réduction à trois espèces fondamentales et aux formes canoniques de LEGENDRE. Il contient un tableau très pratique des formules qui ramènent une intégrale elliptique aux formes de LEGENDRE dans le cas où le polynome du 3^e ou du 4^e degré a ses coefficients réels.

Le chapitre III introduit les fonctions elliptiques de JACOBI et les fonctions thêta; il les relie aux fonctions de WEIERSTRASS et montre l'utilité des fonctions thêta pour le calcul numérique des intégrales elliptiques de 3^e espèce.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des transformations du 1^{er} et du 2^e ordre des fonctions de WEIERSTRASS et de JACOBI.

Le dernier chapitre, d'environ 80 pages, expose l'usage des tables numériques des fonctions et des intégrales elliptiques et donne de nombreuses applications à des problèmes tels que la rectification de l'ellipse et de l'hyperbole, la recherche des géodésiques de l'ellipsoïde de rotation, le flambeau d'une poutre, le pendule simple, la détermination d'une transformation conforme à propos d'un problème aérodynamique. Il est suivi d'une table récapitulative des principales formules établies dans le cours de l'ouvrage (18 pages), d'un tableau comparatif des notations de l'auteur et de celles employées dans les ouvrages classiques, d'une liste bibliographique et d'un indice alphabétique.

A noter pour le lecteur auquel la langue italienne n'est pas familière qu'une traduction allemande de la première édition par M. KRAFFT a paru en 1948 à Leipzig (Akad. Verlagsgesellschaft) sous le titre *Elliptische Funktionen*.

M. Plancherel

Lectures on Classical Differential Geometry. By D. J. STRUIK (Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge 1950). 221 pp., 120 figs.; \$6.00.

Das vorliegende Werk ist aus einer einsemestrigen Vorlesung des Verfassers am Massachusetts Institute of Technology hervorgegangen und legt die Grundbegriffe der klassischen Kurven- und Flächentheorie dar. Die einzelnen Kapitel sind überschrieben mit: Kurven, Elementare Flächentheorie, Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie, Geometrie auf der Fläche, Spezielle Gegenstände aus der Kurven- und Flächengeometrie (Enveloppen, Abbildungen und Landkarten, Minimalflächen, Das Imaginäre in der Flächentheorie).

Das Buch ist sehr ausführlich gehalten. STRUIK verwendet die Vektorschreibweise, wie sie heute für diesen Gegenstand fast allgemein üblich ist. Die notwendigen Hilfsmittel aus der Vektorrechnung sowie aus andern Zweigen der Mathematik sind jeweils, bevor sie gebraucht werden, in Kleinschrift in den Text ein-

gebaut. Die einzelnen Kapitel sind durch Aufgaben abgerundet, von denen die meisten vom Leser ohne fremde Hilfe gelöst werden können. So kann sich der Leser überprüfen; gleichzeitig offenbaren aber diese Aufgaben öfters einen interessanten geometrischen Sachverhalt. Eine Serie von weniger elementaren Aufgaben ist am Schlusse des Buches zusammengestellt.

Besondere Aufmerksamkeit hat der Verfasser den Illustrationen geschenkt; sie zeichnen sich durchgehend durch grosse Anschaulichkeit aus. Einige davon sind äusserst gut geratene Photographien von mathematischen Modellen. Ebenso verdienen die zahlreichen historischen und biographischen Notizen Beachtung.

Das Buch über Differentialgeometrie von STRUIK kann jedermann empfohlen werden, der sich über diesen Gegenstand orientieren möchte. Es eignet sich besonders zum Selbststudium.

M. Jeger

Integraltafel: Erster Teil: *Unbestimmte Integrale*; Zweiter Teil: *Bestimmte Integrale*. Herausgegeben von W. GRÖBNER und N. HOFREITER (Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949/50). VIII + 166 S. bzw. VI + 204 S. sFr. 23.50 und sFr. 25.–.

Die beiden Tafeln enthalten zu den angegebenen Integralen auch theoretische Anleitungen für den Gebrauch; ferner sind in vielen Fällen Rekursionsformeln angegeben, die entlastend wirken. Bemerkenswert ist die gegenüber ähnlichen Tafeln etwas stärkere Betonung der Bedürfnisse der reinen Mathematik.

1. Teil: *Unbestimmte Integrale*. Beginnend mit den Integralen von rationalen Funktionen mit Erläuterungen zur Partialbruchzerlegung bietet das Buch weiterhin eine reichhaltige Sammlung von Integralen, die Wurzeln enthalten. Insbesondere sind Anleitungen zur Umrechnung von elliptischen Integralen auf die Legendresche Normalform gegeben. Schliesslich folgen noch transzendente Integranden in mannigfacher Form und am Schluss des ersten Bandes Integrale über Jacobische und Weierstrasssche elliptische Funktionen.

2. Teil: *Bestimmte Integrale*. Dieser zweite Band enthält eine Fülle von wertvollem Material, insbesondere zahlreiche Integrale, die nur zwischen bestimmten, numerisch gegebenen Grenzen in geschlossener Form ausgewertet werden können. Der Praktiker wird eine solche Tafel um so mehr schätzen, als bestimmte Integrale in der Literatur meist schwer zu finden sind. Im übrigen sind die verschiedenen Typen von Integralen nach den gleichen Gesichtspunkten angeordnet wie im ersten Band, jedoch mit einem besonderen Abschnitt über bestimmte Integrale von Zylinderfunktionen.

Die besondere Reichhaltigkeit dieses Tabellenwerks macht es zu einem wertvollen Hilfsmittel für das Integrieren.

H. Rutishauser

Proceedings of a Second Symposium on Large-Scale Digital Computing Machinery (Harvard University Press, Cambridge, USA., 1951). 293 pp., 121 figs., \$8.–.

Das Werk (Band 26 der «Annals of the Computation Laboratory of Harvard University») ist ein ausführliches Protokoll eines Kongresses an der Harvard University im September 1949. Die 38 gehaltenen Vorträge sind wiedergegeben. Die mathematischen wie die technischen Aspekte programmgesteuerter Rechenmaschinen sind in gleicher Weise berücksichtigt.

Unter den technischen Arbeiten finden wir Beschreibungen einiger im Betrieb oder im Bau befindlicher Rechenautomaten, ferner Erläuterungen von neuen elektrischen Schaltelementen; Erwähnung verdienen hier die Aufsätze *Static Magnetic Delay Lines*, *Coordinate Tubes for Use with Electrostatic Storage Tubes*,

Electrochemical Computing Elements. Weitere Beiträge betreffen neue mathematische Methoden; insbesondere sind folgende Arbeiten hervorzuheben: *Numerical Methods Associated with Laplace's Equation, An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators, On the Monte Carlo Method.* Andere Arbeiten behandeln sodann Anwendungen von programmgesteuerten Rechenmaschinen auf Probleme der theoretischen Physik, der Aerodynamik, der Statistik und der Nationalökonomie. Den Abschluss bildet ein bemerkenswertes Referat *The Future of Computing Machinery* von L. N. RIDENOUR.

Das Buch stellt eine interessante Dokumentation über den Stand des programmgesteuerten Rechnens im Jahre 1949 dar und vermittelt dem Fachmann zahlreiche wichtige Anregungen.

A. P. Speiser.

Grenzschicht-Theorie. Von H. SCHLICHTING (G. Braun, Karlsruhe 1951). 483 S., 295 Abb.; DM 45.–.

Die Strömungslehre erhielt einen entscheidenden Impuls, als PRANDTL 1904 seine Grenzschichttheorie aufstellte. Zum ersten Male war es möglich, die bei grösseren Reynoldsschen Zahlen auftretenden Widerstände auf Körper zu verstehen. Dadurch, dass die Reibung vor allem in einer relativ dünnen Oberflächenschicht wirkt, während die äussere Strömung praktisch reibungsfrei läuft, wird die ungeheuer schwierige Aufgabe der gleichzeitigen exakten Berücksichtigung von Reibung und Trägheit in zwei mindestens näherungsweise viel leichter lösbare Teilaufgaben zerlegt. Schon früh gelang es BLASIUS, das Plattenproblem exakt zu lösen. Ein weiterer wichtiger Schritt gelang 1913/14, als man den Unterschied von laminarer und turbulenter Grenzschicht bei reibungs- und turbulenzfreier Aussenströmung klar erkannte. Von da an ist ein stetiger Fortschritt zu verzeichnen, nachdem dann ausser der Göttinger Schule sich auch die übrige Welt an der Grenzschichtforschung beteiligte.

Die Grenzschichttheorie wird in allen Strömungslehrbüchern behandelt. Es fehlte aber bisher (mindestens im deutschen Sprachgebiet) an einer Monographie, die alles Wesentliche über Grenzschichten zusammenfasst und damit das mühsame Suchen in der verstreuten Literatur erpart. SCHLICHTING, der selbst fundamental wichtige Beiträge vor allem zum Problem der Stabilität laminarer Schichten geleistet hat, war wie kaum einer berufen, diese Aufgabe zu übernehmen. So liegt denn ein stattlicher Band vor, dessen Studium jedem, der näher mit Grenzschichten zu tun hat, aufs wärmste empfohlen werden kann.

Zuerst wird die Zähigkeit in elementarer Weise eingeführt und ihre Wirkung beschrieben. Nachher folgen die exakten Gleichungen und diejenigen Fälle, die exakt gelöst werden können. Entsprechend dem Ziel des Buches sind die Fälle mit starker Reibung (Stokes-Formel, Lagerschmierung) nur kurz behandelt. Es folgt dann die ausführliche Behandlung der laminaren Grenzschichten – ohne und mit Druckgradienten der Hauptströmung; auch sind nichtstationäre Fälle behandelt. Die Näherungsmethoden sind naturgemäß sehr eingehend dargestellt, wobei sowohl ebene als auch rotationssymmetrische Fälle gleichmässig behandelt werden. Besonders interessant ist das Kapitel über Grenzschichtbeeinflussung, wo ziemlich viele neue Ergebnisse, die in der Kriegs- und Nachkriegszeit gewonnen wurden, mitgeteilt werden. Kompressible laminare Grenzschichten mit und ohne Wärmeübergang folgen.

Das nun folgende Kapitel über die Entstehung der Turbulenz scheint dem Referenten eher etwas knapp gefasst. Man möchte gerne, dass der Verfasser, der ja gerade auf diesem Gebiet zu Hause ist, die Methodik der Stabilitätsrechnungen

etwas ausführlicher darstellen würde. Hingegen ist die Übersicht über die bisherigen Lösungen sehr ausführlich und nützlich.

Der voll turbulenten Grenzschicht und den freien Strahlen ist der ganze Rest des Buches gewidmet. Auch hier ist die neueste Entwicklung eher etwas zu kurz gekommen; der mehr elementare Standpunkt, der dem Ingenieur natürlich besonders nützlich ist, wiegt hier vor. Besonders interessant ist auch das Kapitel über Rauhigkeit.

Man muss das Schlichtingsche Buch als ein Standardwerk bezeichnen, das für jeden, der mit der Strömung wirklicher Flüssigkeiten und Gase zu tun hat, eine unentbehrliche Fundgrube darstellt. Ganz besonders werden die Ingenieure darüber glücklich sein, da es der Verfasser verstanden hat, von den mathematischen Mitteln weisen Gebrauch zu machen, und die physikalische Wirklichkeit nicht aus den Augen verloren wird.

J. Ackeret

Nomography and Empirical Equations. By L. JOHNSON (John Wiley & Sons, New York, 1952). 150 pp.; \$3.75.

Dieses neue Lehrbuch behandelt zwei verschiedene, verwandte Gebiete. Der erste, 90 Seiten umfassende Teil ist der Nomographie gewidmet, der zweite, kürzere, der analytischen Approximation empirischer Funktionen.

Im nomographischen Teil erörtert der Verfasser zunächst eingehend den Begriff der Funktionsleiter. Sodann entwickelt er die Konstruktionsregeln der Fluchtentafeln mit drei parallelen Leitern, der Z- oder N-Tafeln und der Tafeln mit zwei parallelen und einer krummlinigen Leiter, welche zu den Funktionsarten $f_1 + f_2 = f_3$, $f_1 = f_2 \cdot f_3$ und $f_1 \cdot g_3 + f_2 + f_3 = 0$ gehören. Diese Tafeln enthalten bekanntlich Funktionsleitern, die in f_1 und f_2 regulär sind. In gewissen Fällen, etwa wenn diese Funktionen sehr grosse Werte annehmen, kann es wünschenswert sein, in bezug auf $1/f_1$ und $1/f_2$ reguläre Leitern zeichnen zu können. Dies kann durch geeignete kollineare Abbildung der erwähnten Tafeln erreicht werden. Es ist ein Verdienst des Verfassers, diese Abarten von Tafeln und Funktionstypen besonders behandelt zu haben. – Eingehend werden auch Beziehungen zwischen vier und mehr Veränderlichen erfasst, die durch Verbindung der bisher genannten Tafeltypen mittels Zapfenlinien darstellbar sind.

Mit diesen einfachen Mitteln beherrscht der Autor eine grosse Menge praktischer Beispiele aus der Technik, der er auch zahlreiche Aufgaben entnimmt. Auf kompliziertere Tafeltypen verzichtet er, und er lässt, was wesentlicher ist, auch das ganze Gebiet der Netztafeln beiseite. Insofern ist der Titel des Buches zu weit gefasst.

Im zweiten Teil (Empirical Equations) geht es darum, beobachtete Folgen von Wertepaaren einer Funktion zu approximieren mittels einer Funktion $y(x)$ von vorgeschriebenem analytischem Bau, in der Hauptsache Potenzfunktionen oder weniggliedrige Polynome und Exponentialfunktionen. Als Verfahren zur Berechnung der Konstanten wird zwar die Methode der kleinsten Quadrate skizziert. In beinahe allen Beispielen wird jedoch untersucht, ob das Beobachtungsmaterial bei Eintragung auf geeignetes Funktionspapier (einfach- oder doppeltlogarithmisch usw.) sich geradlinig anordnet, die Funktion also hier ersten Grades wird. Durch Rückkehr zu den Variablen x und y ergibt sich dann das Gesetz $y(x)$.

Der Schreibende möchte an JOHNSONS Werk die leichtfassliche und elementare Darstellung loben, besonders aber das klare Herausarbeiten der Resultate und ihre Zusammenstellung in Tabellen, die dem Benutzer sehr nützlich sein werden.

E. Völlm

Die Messwandler - ihre Theorie und Praxis

Von Dr. J. GOLDSTEIN, dipl. Ing.

Das Buch stellt eine *vollständig neu bearbeitete und wesentlich ergänzte zweite Auflage* des im Jahre 1928 unter dem gleichen Titel erschienenen Werkes dar. Der Entwicklung auf dem Messwandlergebiet und den wichtigsten Neuerscheinungen der letzten Jahre wird Rechnung getragen.

222 Seiten mit 199 Abb. In Ganzleinenband Fr. 29.10, broschiert Fr. 24.95 (1952)

Die Gestalt der elektrischen Freileitung

Von Dr. techn. MILAN VIDMAR

Der vom Transformatorenbau her sehr bekannte Verfasser, der sich seit ungefähr einem Jahrzehnt der elektrischen Energieübertragung zugewandt hat, versucht in diesem Buch die Grundzüge einer Theorie aufzubauen, die die bisherige ziemlich rohe, obgleich erfolgreiche Empirie des Freileitungsbauens ersetzen soll.

200 Seiten mit 49 Figuren. Ganzleinen Fr. 19.75, broschiert Fr. 16.65 (1952)

Neu erschienen im

VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL UND STUTTGART

A T O M W A F F E N

Anwendung • Wirkungsweise • Schutzmassnahmen

U. JETTER unter Mitarbeit von W. HANLE

Unter Verwendung des offiziellen Berichts der U.S. Atomic Energy Commission versucht diese Veröffentlichung, von wissenschaftlicher Seite her das Grundsätzliche der Wirkung von Atombomben und die Möglichkeiten von Schutzmassnahmen darzustellen. Sie soll dazu dienen, der bewusst grossgezogenen Angst vor der Atombombe entgegenzutreten und eine richtige Einschätzung dieser Waffe zu gewinnen.

Aus dem Inhalt: Die Atombombe als Objekt der Politik. – Physikalische und chemische Grundlagen: Kernprozesse; Uran und Plutonium; Kettenreaktion im Kernreaktor und in der Atombombe; Messverfahren der Kernphysik. – Eigenschaften und Einsatz von Atomwaffen: Atombomben und radioaktive Gifte; Die wirkliche und die nominelle Atombombe; Die Luftexplosion; Explosion im Wasser, auf dem Boden und in der Erde. – Die Wirkung von Atombomben: Druckwelle und Luftstoss; Licht- und Wärmestrahlung; Kernstrahlung und radioaktive Verseuchung. – Planung von Schutzmassnahmen: Die Erfahrungen in Japan; Allgemeine Schutzmassnahmen; Kernstrahlung und radioaktive Verseuchung; Planung auf weite Sicht.

72 Seiten A 5, 30 Abbildungen und Zeichnungen, 8 Tabellen, brosch. DM 4.80

Zu beziehen durch jede Buchhandlung oder direkt vom

P H Y S I K V E R L A G - M O S B A C H / B A D E N

J. J. BURCKHARDT
Professor an der Universität Zürich

Die Bewegungsgruppen der Kristallographie

(1947) 184 Seiten mit 56 Figuren. Leinenband Fr. 33.30, broschiert Fr. 29.10

« Das Ziel des Buches ist eine rein mathematische und in allen Einzelheiten auch dem Nichtmathematiker verständliche Behandlung der Kristallklassen und Bewegungsgruppen. Die frühere einschlägige Literatur war meistens entweder nur dem Mineralogen oder nur dem Mathematiker zugänglich. Es gelang dem Verfasser, den Ansprüchen beider Arten von Lesern zu entsprechen, indem er alle mathematischen Hilfsmittel und Überlegungen klar darlegt, nur durch die kristallographische Zielsetzung bedingte mathematische Hilfsmittel gebraucht und die (Schoenflieschen) Bezeichnungen und Benennungen der Kristallographie benutzt, anderseits aber seinen Stoff in rein mathematischer Weise behandelt und so auch das Interesse des reinen Mathematikers für den aus der Kristallographie entsprungenen Gegenstand erweckt. »

(Zentralblatt für Mathematik)

VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL UND STUTTGART

Neuerscheinungen aus dem Verlag Birkhäuser, Basel und Stuttgart

Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften
Mathematische Reihe – Band 13 und 18

L. BIEBERBACH

Theorie der geometrischen Konstruktionen

(1952) 162 Seiten mit 102 Figuren. In Ganzleinenband Fr. 18.70, broschiert Fr. 15.60

Das Buch ist aus den Vorlesungen des Verfassers an den Universitäten Basel, Frankfurt am Main und Berlin entstanden. Es gibt eine systematische Darstellung von Problemen und Ergebnissen, die seit dem Altertum in Forschung und Lehre ein stetes Interesse gefunden haben. Die durch die neuere Literatur und durch eigene, hier erstmals veröffentlichte Überlegungen des Verfassers möglich gewordenen Fortschritte wurden eingearbeitet.

H. HERRMANN

Übungen zur projektiven Geometrie

(1952) 168 Seiten mit 90 Figuren, Betrachtungsbrillen und 4 Raumbildern
In Ganzleinenband Fr. 17.–, broschiert Fr. 14.–

In den vorwiegend analytischen Lösungen zu 279 Übungen wird auch der Kenner einige neue Darstellungsweisen finden, so in der Art der Verwendung der Matrizen, deren formale Eleganz durch inhaltlich-an anschauliche Deutungen bereichert erscheint. Die Übungen sind zum Gebrauch neben Vorlesungen und Lehrbüchern bestimmt, insbesondere ergänzen sie die Bücher von W. BLASCHKE in dieser Sammlung.

clichés
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G
BASEL / ZÜRICH

Mathematische Werke aus dem Verlag Birkhäuser · Basel / Stuttgart

<i>Der Briefwechsel von Johann Bernoulli.</i> Herausgegeben von der Bernoulli-Kommission der Naturforschenden Gesellschaft Basel. Band I: ca. 480 Seiten mit zahlreichen Figuren	Fr. (DM) *
<i>BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen.</i> 170 Seiten mit 103 Figuren	geb. 18.70 *
<i>BLASCHKE, W.: Analytische Geometrie.</i> Zweite, verbesserte Auflage	*
<i>BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie.</i> Dritte, verbesserte Auflage	*
<i>BURKHARDT, J. J.: Die Bewegungsgruppen der Kristallographie</i>	geb. 33.30
<i>CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie.</i> In zwei Bänden.	
Band I: 288 Seiten mit 33 Figuren	geb. 39.50
Band II: 194 Seiten mit 73 Figuren	geb. 27.05 *
<i>CARATHÉODORY, C.: Mass und Integral und ihre Algebraisierung.</i>	*
<i>DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation.</i> Band I: 581 Seiten mit 40 Figuren	geb. 83.20
<i>FINSLER, P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.</i> Unveränderter Nachdruck der Dissertation von 1918, vermehrt um ein ausführliches Literaturverzeichnis von Dr. H. Schubert. 170 Seiten	geb. 15.40
<i>FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.</i> 180 Seiten mit 106 Figuren	geb. 24.95
<i>HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie.</i> 168 Seiten mit 90 Figuren, 4 zweifarbigem Raumbildern und 1 rot-grünen Betrachtungsbrille	geb. 17.—
<i>HURWITZ, A.: Mathematische Werke</i>	
Band I: Funktionentheorie. 734 Seiten mit 23 Figuren	geb. 54.10
Band II: Zahlentheorie, Algebra und Geometrie. 755 Seiten mit 11 Figuren	geb. 54.10
<i>LINDER, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure.</i> 150 Seiten mit 38 Figuren. Zweite, erweiterte Auflage	geb. 31.20
<i>LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen.</i> 596 Seiten mit 406 Figuren	geb. 49.90
<i>LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven.</i> 85 Seiten mit 168 Fig. brosch. 12.50	
<i>OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung</i>	
Band I: Funktionen einer Variablen. 373 Seiten mit 42 Figuren	geb. 56.15
Band II: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. 484 Seiten, 55 Fig.	geb. 69.70
Band III in Vorbereitung	
<i>SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen.</i> Band I: 392 Seiten mit einem Porträt	geb. 56.15
<i>STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie.</i> 174 Seiten mit über 130 Figuren	geb. 29.65
<i>VÖLKER, D., und DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation.</i> 260 Seiten mit 17 Figuren und vielen Tabellen	geb. 47.85
<i>ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik.</i> 109 Seiten mit 15 Figuren	geb. 31.20

* In Vorbereitung

ZEITSCHRIFTEN

Archiv der Mathematik — Archives of Mathematics — Archives des mathématiques

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach von H. KNESER und W. SÜSS.

Beirat: G. BOL, E. BOMPIANI, P. TEN BRUGGENCATE, J. DIEUDONNÉ, CH. EHRESMANN, H. GÖRTLER, H. HADWIGER, H. HOPF, W. MAGNUS, T. NAGELL, CHR. PAUC, J. RADON, K. REIDEMEISTER, J. A. SCHOUTEN, H. SEIFERT, R. SPERNER, E. STIEFEL. Redaktion: H. BILHARZ, Universität Freiburg i. Br. Erscheint seit 1948; ab Band 3 (1952) jährlich in 6 Heften von je ca. 80 Seiten Umfang. Abonnementspreis pro Band Fr. 60.—, Einzelheft Fr. 12.—.

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)

Journal of Applied Mathematics and Physics — Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Redaktionskommission: J. ACKERET, E. BAUMANN, P. NIGGLI, P. SCHERRER, E. STIEFEL, F. STÜSSI, H. ZIEGLER. Redaktion: R. SÄNGER, Eidg. Technische Hochschule, Zürich. Erscheint seit 1950 alle 2 Monate. 16 × 23 cm. Jährlich Fr. 34.—; Ausland Fr. 40.—; Einzelpreis Fr. 8.—.